Fonctions de référence TC.

III) Fonctions de référence.

1)Fonctions affines . الدوال التآلفية

a) Remarque: *La représentation graphique d'une fonction affine f tel que $f(x)=ax+b$ est la droite d'équation $y=ax+b$*

- *Si $a>0$ la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$*
- *Si $a<0$ la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$*
- *Si $a=0$ la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$*

b) Exemple1:

Soit f la fonction définie par $f(x)=|x|$ et (C_f) sa représentation graphique dans repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue et Tracer (C_f)

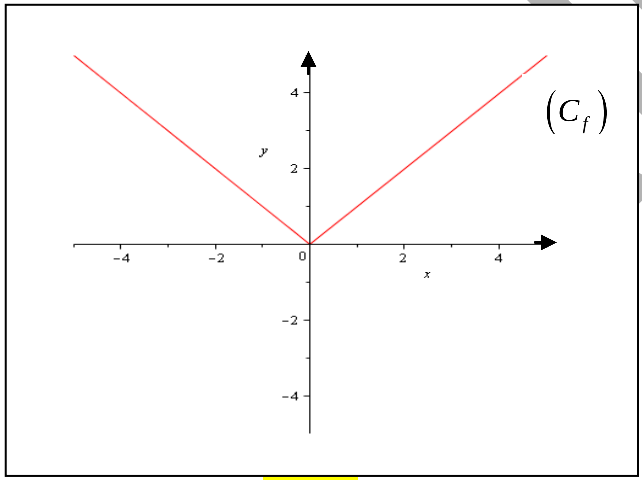
Correction

- $\begin{cases} f(x)=x & si\ x\geq 0 \\ f(x)=-x & si\ x\leq 0 \end{cases}$ c.à..d. $\begin{cases} f(x)=x & si\ x\in[0,+\infty[\\ f(x)=-x & si\ x\in]-\infty,0] \end{cases}$

- Représentation graphique de f

On remarque que f est paire

donc (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées



Exemple 2 *Soit g la fonction définie par (fonction définie par morceaux)*

$\begin{cases} g(x)=x-2 & si\ x>2 \\ g(x)=-2x+1 & si\ x\leq 1 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} g(x)=2x-5 & si\ x\in]2,+\infty[\\ g(x)=-2x+1 & si\ x\in]-\infty,1] \end{cases}$

et sa représentation graphique dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

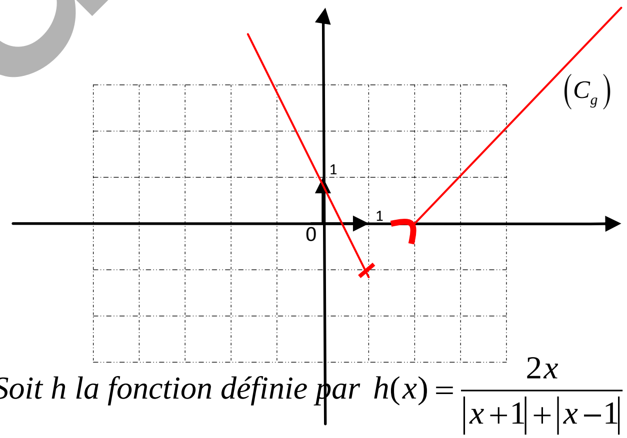
- Déterminer D_g et calculer $g(-3), g(-1)$, $g(1/2)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$

- Tracer (C_g)

Correction

$D_g=\{x\in\mathbb{R}\,/\,g(x)\in\mathbb{R}\}=]-\infty,1]\cup]2,+\infty[$

x	-1	1/2	1	2	3	4
f(x)						



c) Exercice : *Soit h la fonction définie par $h(x)=\dfrac{2x}{|x+1|+|x-1|}$*

et (C_h) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

**1 Déterminer D_h et étudier la parité de h*

**2 En choisissant des intervalles convenables écrire $h(x)$ sans valeur absolue .*

** 3 Tracer (C_h)*

* 1 $h(x)=\dfrac{2x}{|x+1|+|x-1|}$ $D_l=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x-1|+|x+1|\neq 0\}$

$|x+1|+|x-1|=0$ *signifie* $|x+1|=-|x-1|$ *signifie* $|x+1|=0$ *et* $|x-1|=0$

Signifie $x=-1$ **et** $x=1$ *ce qui est impossible*

donc $D_h=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$ *car donc* $|x+1|+|x-1|=0$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$

D_h est symétrique par rapport à 0

c.à.d. pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$

$$h(-x)=\frac{2(-x)}{|-x+1|+|-x-1|}=\frac{-2x}{|x-1|+|x+1|}=-\frac{2x}{|x+1|+|x-1|}=-h(x)$$

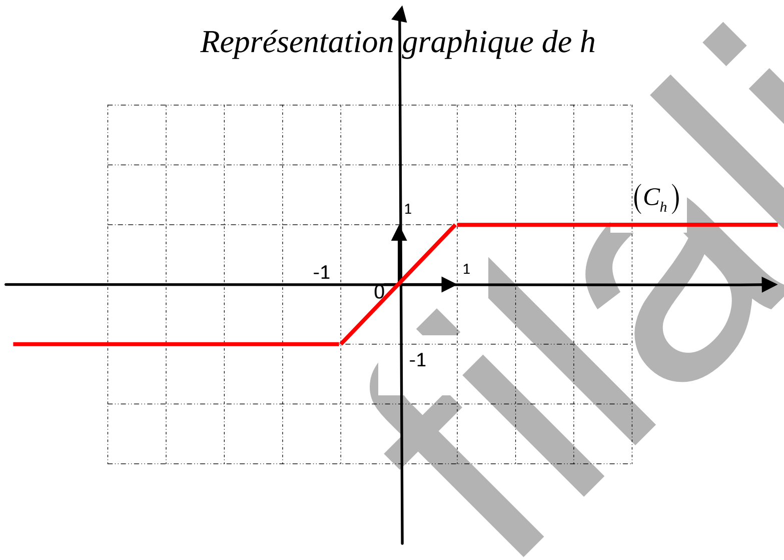
$h(-x)=h(x)$ Donc h est impaire, donc sa représentation graphique (C_h) est symétrique par rapport à l'origine du repère .

*2

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\lvert x+1\rvert$		-x-1	0	x+1		x+1	
$\lvert x-1\rvert$		-x+1		-x+1	0	x-1	
$\lvert x+1\rvert+\lvert x-1\rvert$		-2x		2		2x	

$$\begin{cases} si\ \ x\le -1 \quad alors \quad h(x)=-1 \\ si\ \ -1\le x\le 1 \quad alors \quad h(x)=x \\ si\ \ x\ge 1 \quad alors \quad h(x)=1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} h(x)=-1 \ \ si\ \ x\in]-\infty,1] \\ h(x)=x \ \ si\ \ x\in[-1,1] \\ h(x)=1 \ \ si\ \ x\in[1,+\infty[\end{cases}$$

Représentation graphique de h



2)Fonctions polynômes du second degré الدوال الحدودية من الدرجة الثانية

a) Exemple 1: $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$,

- Etudier la parité de f f est paire   évident ?
- Etudier les variations de f sur les intervalles $]-\infty,0]$ et $[0,+\infty[$

Sur $[0,+\infty[$ $\alpha\ge 0$ et $\beta\ge 0$ tel que $\alpha<\beta$ donc $\frac{1}{2}\alpha^2<\frac{1}{2}\beta$

alors $f(\alpha)<f(\beta)$ donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

Puisque f est impaire alors f est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$

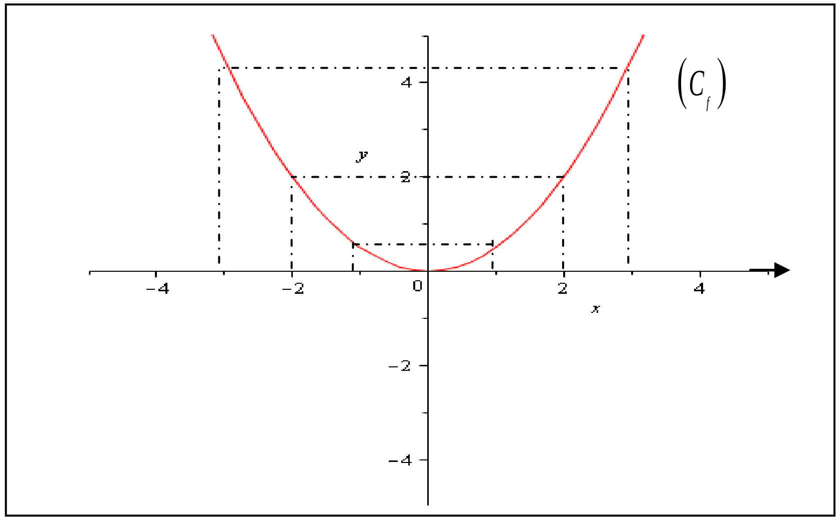
tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

- tableau valeurs

x	1/2	1	3/2	2	5/2	3
$f(x)$						

puisque f est paire alors (C_f) est symétrique par rapport à l 'axe des ordonnées



La courbe (C_f) s' appelle **parabole** de **sommet O** et **d'axe de symétrie** l'axe des ordonnées.

b) Exemple 2: $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ (C_g) sa représentation graphique dans repère le $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c)Cas général . Fonctions polynômes du second degré .

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, et c des nombres réels tel que $a \neq 0$

(C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonale $(O,\vec{i},\vec{j})$

* La représentation graphique (C_f) de f s'appelle parabole

de sommet le point $\Omega\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

et d'axe de symétrie la droite d'équation $y = -\frac{b}{2a}$

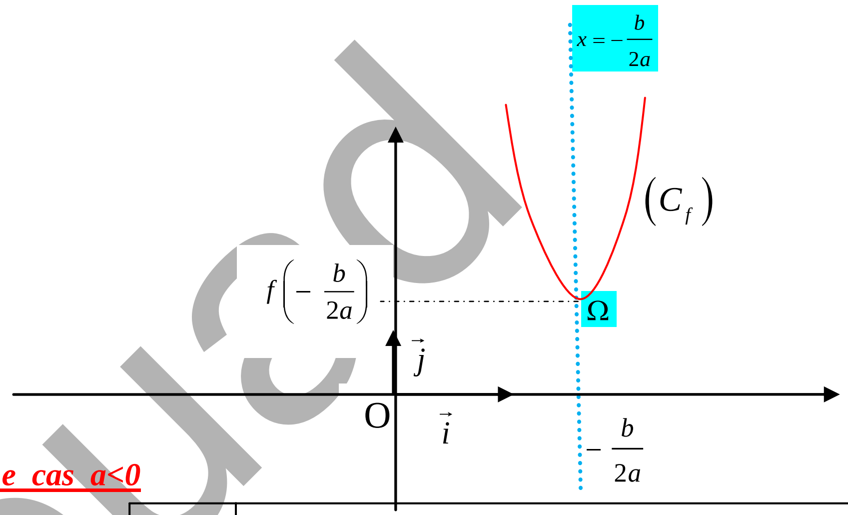
* **Variation de f**

1er cas a>0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗

La courbe (C_f) s'appelle parabole de sommet Ω et d'axe de symétrie la droit d'équation $y = -\frac{b}{2a}$ et de concavité dirigée vers le haut

f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ (**minimum absolu**) qui est $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$



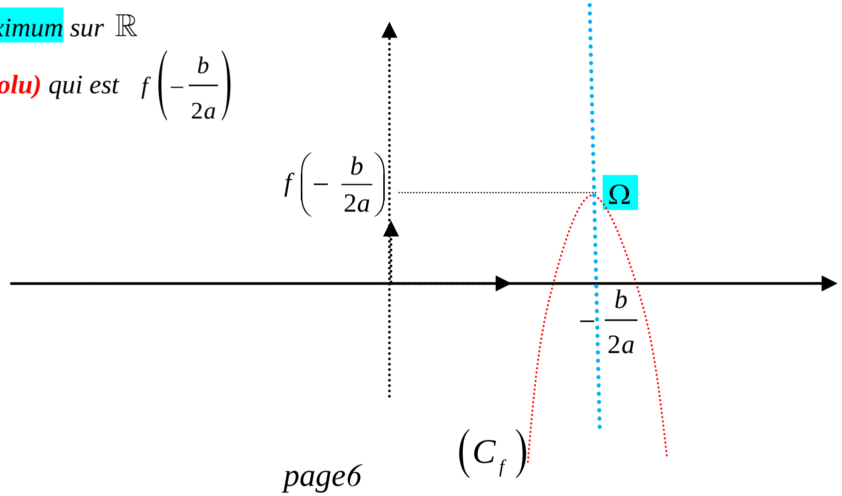
2ième cas a<0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘

La courbe (C_f) s'appelle parabole de sommet Ω et d'axe de symétrie la droit d'équation $y = -\frac{b}{2a}$ et de concavité dirigée vers le ba

$x = -\frac{b}{2a}$

f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ (**maximum absolu**) qui est $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$



Exercice Soit f la fonction définie par $f(x)=2x^2-4x+3$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonale $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer D_f et déterminer la nature de (C_f) et ses caractéristiques

2) Dresser le tableau de variation de f

3) En remplissant le tableau de valeurs suivantes construire (C_f)

x	1	3/2	2	5/2	3
f(x)					

4) En déduire une comparaison de $f(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ et $f(\sqrt{5}+\sqrt{7})$

5) Sans calculatrice comparer $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}-\sqrt{5}$

et en déduire une comparaison de $f(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ et $f(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

2) Fonctions homographiques الدوال المتخاطة

a) Exemple1: $f(x)=\dfrac{2}{x}$ (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$,

- étudier la parité de f
- Etudier les variations de f sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ et dresser son tableau de variation
- Remplir le tableau des valeurs suivantes

X	1/2	1	2	3	4	5
f(x)	4	2	1	2/3	1/2	2/5

Correction

- $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ f est impaire

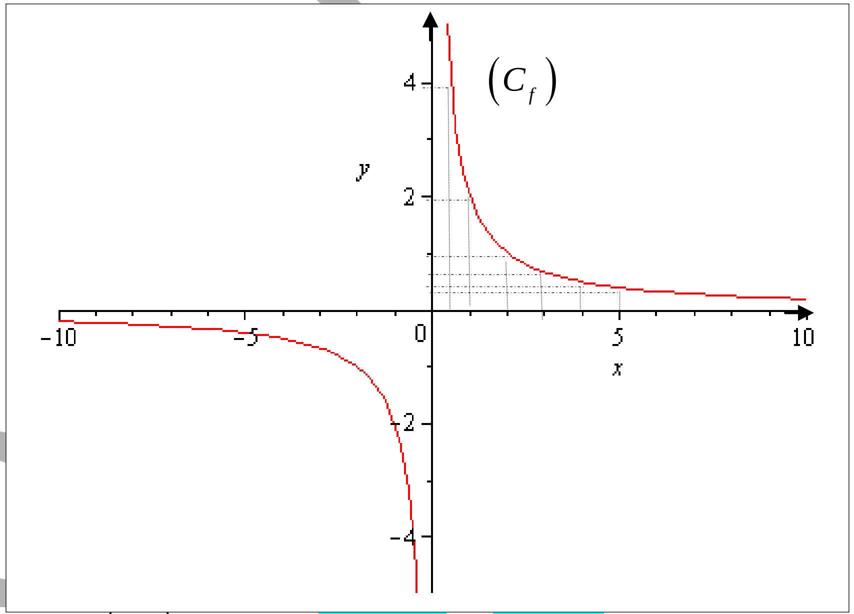
- variation Sur $]0,+\infty[$ $\alpha<\beta$ donc $\dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{1}{\beta}$ donc $\dfrac{2}{\alpha}>\dfrac{2}{\beta}$

donc $f(\alpha)>f(\beta)$ donc f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

et puisque f est impaire alors f est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)		↘	‖	↘	

Représentation graphique (C_f) de f



La courbe (C_f) s'appelle hyperbole de centre O et d'asymptotes les deux droites d'équations $(D_1): x=0$ et $(D_2): y=0$

b) Exemple2: $g(x)=\dfrac{-2}{x}$ (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, mêmes questions que a) Exp1

- $D_g=\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ g est impaire

- variation Sur $]0,+\infty[$ $\alpha<\beta$ donc $\dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{1}{\beta}$ donc $\dfrac{-2}{\alpha}<\dfrac{-2}{\beta}$

donc $g(\alpha)<f(\beta)$ donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

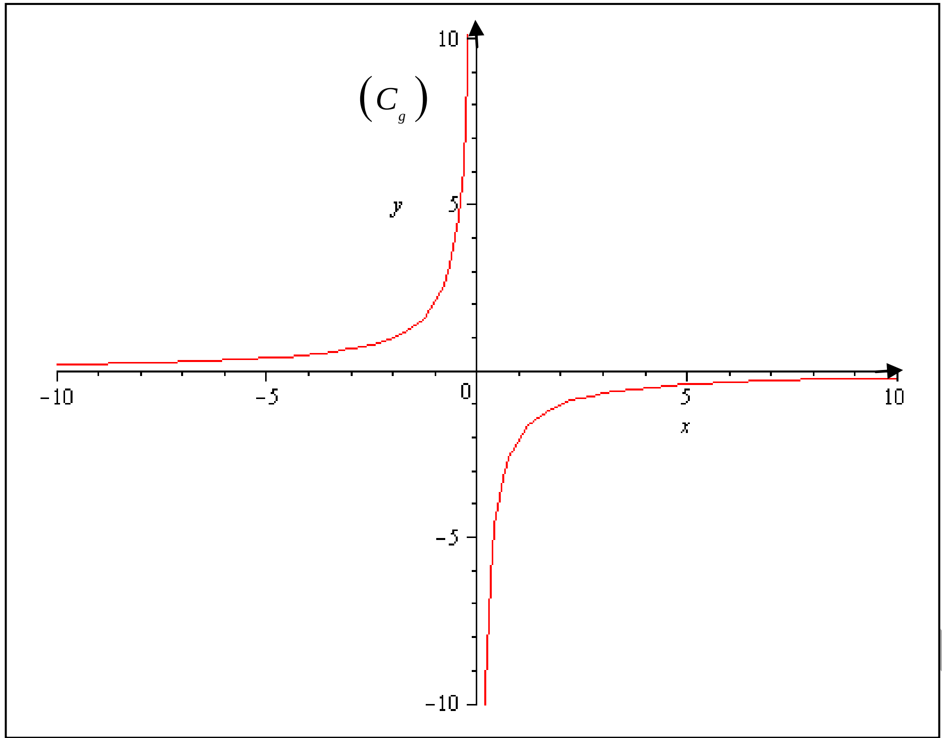
et puisque g est impaire alors g est strictement croissante sur $]-\infty,0[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)		↗	‖	↗	

Tableau de valeurs

X	1/2	1	2	3	4	5
f(x)	-4	-2	-1	-2/3	-1/2	-2/5

Représentation graphique (C_{gf}) *de g*



La courbe (C_g) *s'appelle hyperbole de centre O*

et d'asymptotes les deux droites d'équations $(D_1): x=0$ *et* $(D_2):\ y=0$

c)Cas général . Fonctions homographiques

Définition :

a, b, c et d des nombres réels tels que $c\neq 0$ *et* $ad-bc\neq 0$

la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ *s'appelle*

fonction homographique

Exemples $f(x)=\dfrac{3}{x}$; $g(x)=\dfrac{2}{3x+4}$; $h(x)=\dfrac{\sqrt{2}.x-1}{x}$; $l(x)=\dfrac{3x-2}{-2x+\sqrt{3}}$

Propriété

Soit une fonction homographique définie par

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ *tel que* $c\neq 0$ *et* $ad-bc\neq 0$

* $D_f=\{x\in\mathbb{R}/cx+d=0\}=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

$D_f=\left]-\infty,-\dfrac{d}{c}\right[\cup\left]-\dfrac{d}{c},+\infty\right[$

* $T=\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=\dfrac{ad-bc}{(c\beta+d)(c\beta+d)}=\dfrac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(c\beta+d)(c\beta+d)}$

Si $ad-bc>0$ *alors f est strictement croissante sur chacun*

des intervalle $\left]-\infty,-\dfrac{d}{c}\right[$ *et* $\left]-\dfrac{d}{c},+\infty\right[$

x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
f(x		↗	‖	↗	

Si $ad-bc<0$ *alors f est strictement décroissante sur chacun*

des intervalle $\left]-\infty,-\dfrac{d}{c}\right[$ *et* $\left]-\dfrac{d}{c},+\infty\right[$

x	$-\infty$		$-d/c$		$+\infty$
f(x		↘	‖	↘	

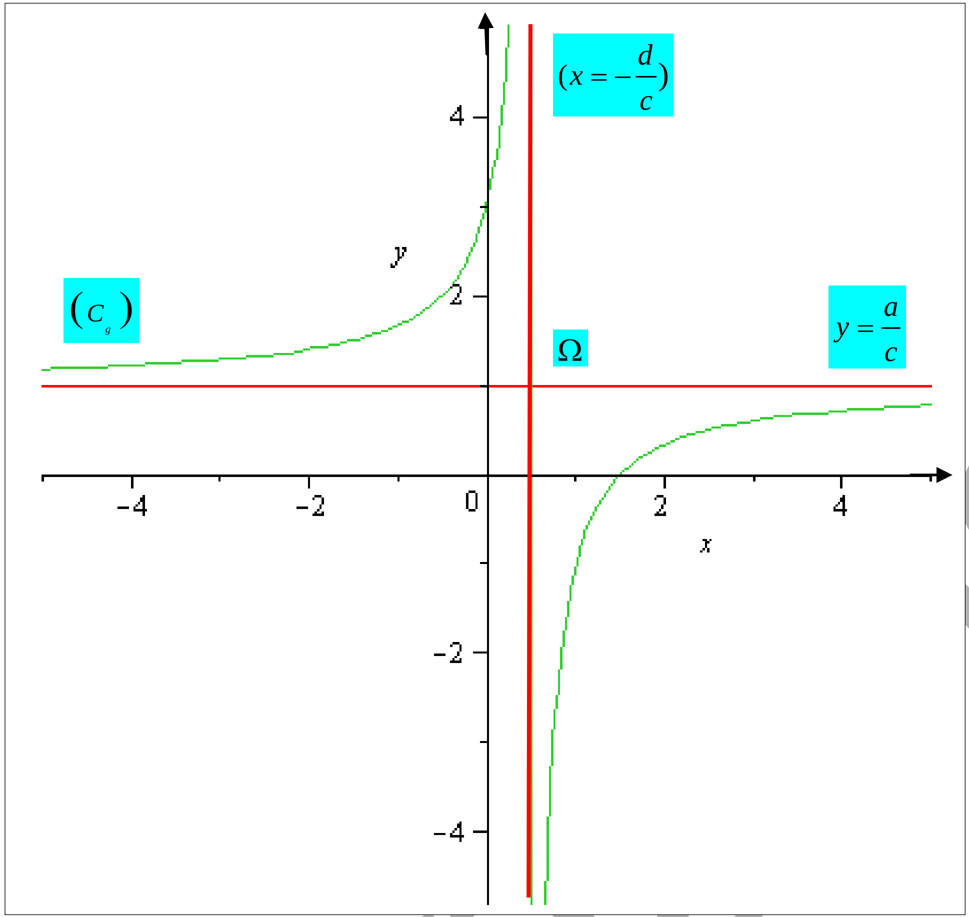
Représentation graphique d'une fonction homographique

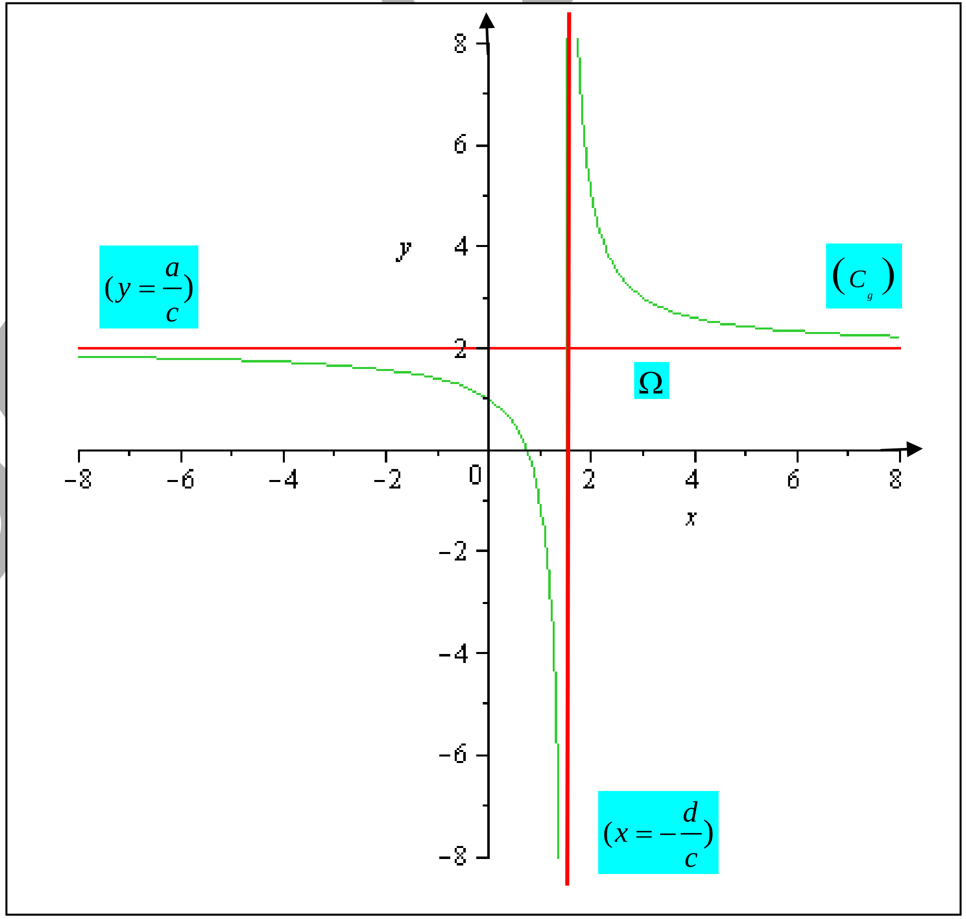
$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{2x-3}{2x-1}$$

Cas où $ad-bc>0$

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{4x-5}{2x-3}$$

Cas où $ad-bc<0$





La courbe représentative (C_f) *de* f *s'appelle hyperbole de centre* $\Omega(-\frac{d}{c},\frac{a}{c})$ *et d'asymptotes les droites d'équation* $(D_1): x=-\frac{d}{c}$ *et* $(D_2): y=\frac{a}{c}$