Primitives d'une fonction

1) Définition et propriétés

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I ; on appelle **primitive de f** sur I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que F' = f.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$.
La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 + x + 18$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ car $F'(x) = f(x)$.

Point méthode : Comment reconnaître une primitive ?
Pour démontrer que F est une primitive de f sur un intervalle I, il suffit de prouver que F est dérivable sur I et que F' = f.
Comment vérifier qu'une fonction est une primitive d'une autre : point méthode 2 page 47.
Exercice 24 page 58.

Théorème : soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I, alors f admet une infinité de primitives. Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où k est une constante réelle.

Exemple : Les fonctions $x \mapsto x^3 + x^2$, $x \mapsto x^3 + x^2 + 6$, $x \mapsto x^3 + x^2 - \frac{2}{3}$ sont des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynôme $x \mapsto 3x^2 + 2x$.

Conséquence : Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante :
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, F et G deux primitives de f sur I.
Il existe un nombre réel k tel que, pour tout x de I, on a : $F(x) - G(x) = k$.

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et soit a et b deux réels. Il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(a) = b$.

Exemple : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 4$. Trouver la primitive de f notée F telle que $F(3) = 1$.
Voir point méthode 3 page 47 : comment identifier une primitive particulière.

2) Calculs de primitives

☞ Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent immédiatement aux résultats suivants.

- Si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I,
  alors F + G est une primitive de $f + g$ sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I.

☞ De même, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent « par lecture inverse » le tableau de primitives suivant :

Fonction f	**Fonction primitive F (C =constante)**	**Intervalle I**
$f(x) = 0$	$F(x) = C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = a$ (constante)	$F(x) = ax + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$ si $n \in \mathbb{Z}^-$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$ (cas $n = -2$)	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0;+\infty[$

☞ Le tableau suivant résume divers cas d'exploitation de la dérivée d'une fonction composée pour l'expression d'une primitive.
Dans chaque cas, la fonction u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

fonction	**une primitive**	**conditions**
$u' u^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	pour tout x dans I, $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$ (n entier $\geqslant 2$)	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$	pour tout x dans I, $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$ sur I

Exercice résolu 1 : Soit $f(x) = x(x^2 + 2)^3$. Posons $u(x) = x^2 + 2$ alors, $u'(x) = 2x$.

$u'(x)\, u^3(x) = 2x(x^2 + 2)^3$ donc $f = \frac{1}{2} u' u^3$ et donc, $F = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} u^4 = \frac{1}{8} u^4$.

Une primitive de f est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}(x^2 + 2)^4 = \frac{1}{8}(x^2 + 2)^4$.

Exercice résolu 2 : Soit $f(x) = \frac{1}{(3x + 2)^2}$ sur $]-\frac{2}{3}\,; +\infty[$. Posons $u(x) = 3x + 2$ alors, $u'(x) = 3$

$\frac{u'(x)}{u^2(x)} = \frac{3}{(3x + 2)^2}$ donc $f = \frac{1}{3}\,\frac{u'}{u^2}$ et $F = \frac{1}{3} \times \frac{-1}{u}$.

Une primitive de f est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{-1}{3x + 2}$