FILALI JAOUAD

LES APPLICATIONS
1SM
INJECTIONS, SURJECTIONS, BIJECTIONS

I)GÉNÉRALITÉS SUR LES APPLICATIONS

1-Définition

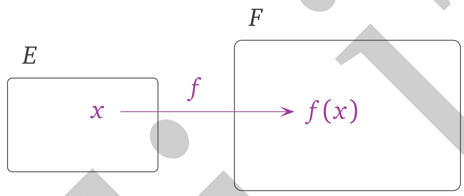
- On appelle *application de E dans F* toute relation f de E vers F qui a chaque x associe un y et un seul de F
$$\forall x \in E, \exists\,!\, y \in F, (x, y) \in f.$$

La présence du pseudo-quantificateur « $\exists$! » permet de noter $f(x)$ l'unique $y \in F$ et on écrit : $y = f(x)$.

- L'ensemble E est appelé l'*ensemble (de départ) de* f. L'ensemble F est quant à lui appelé un *ensemble d'arrivée de* f.
- Pour tout $x \in E$, $f(x)$ est appelé L'*image de x par f*.

Pour tout $y \in F$, tout élément x de E pour lequel : $y = f(x)$ est appelé UN *antécédent de y par f*.

On représente classiquement les applications par « patates » (figure1),



(IMAGE DIRECTE D'UNE PARTIE, IMAGE D'UNE APPLICATION)

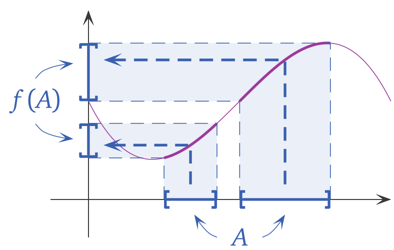
1-Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- Pour toute partie A de E, on appelle *image (directe) de A par f*, notée $f(A)$, l'ensemble :

$$f(A) = \left\{ y \in F \mid \exists\, a \in A, \quad y = f(a) \right\} = \left\{ f(a) \mid a \in A \right\}.$$

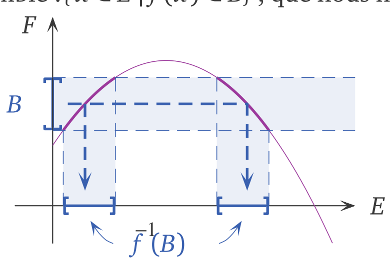
- L'image $f(E)$ de E tout entier par f est simplement appelée l'*image de f*.



(IMAGE RECIPROQUE D'UNE PARTIE, IMAGE D'UNE APPLICATION)

1-Définition

.On appelle *image réciproque de B par f* l'ensemble :$\{ x \in E \mid f(x) \in B \}$, que nous noterons PROVISOIREMENT $\overset{-1}{f}(B)$.



Par définition, $\overset{-1}{f}(B)$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f appartient à B. Géométriquement, pour déterminer $\overset{-1}{f}(B)$, on projette sur l'axe des abscisses la portion du graphe de f située dans le tube horizontal défini par B.

Pour tout $x \in E$: $\boxed{x \in \overset{-1}{f}(B) \Longleftrightarrow \quad f(x) \in B.}$

Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, chercher l'image réciproque d'un singleton $\{y\}$ par f revient à résoudre l'équation : $y = f(x)$ d'inconnue x, alors que pour un intervalle $[a,b]$, cela revient à résoudre l'inéquation : $a \leqslant f(x) \leqslant b$.

$\overset{-1}{f}(B)$

$f(B)$

Exemple

- L'image réciproque de $\{1\}$ par la fonction sinus est $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$, liée à l'équation : $\sin x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
  L'image réciproque de $[2,3]$ est vide, liée à l'inéquation : $2 \leqslant \sin x \leqslant 3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
- L'image réciproque de $[4,+\infty[$ par la fonction carrée est $]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[$, liée à l'inéquation : $x^2 \geqslant 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

(COMPOSITION DES APPLICATIONS , L'IDENTITÉ)

Définition

- Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
  L'application $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}\right.$ est appelée la *composée de f suivie de g* et notée $g \circ f$.
- On appelle *identité de E* et on note Id_E l'application $x \longmapsto x$ de E dans E.

Attention ! Rappelons que la composition, en général, n'est possible que dans un seul sens, et quand elle est possible dans les deux, on n'a aucune raison d'avoir : $f \circ g = g \circ f$.

Théorème (Propriétés de la composition) Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications.

- **Associativité :** $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- **Neutralité de l'identité :** $\mathrm{Id}_F \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

Démonstration Pour tout $x \in E$:
$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = \big((h \circ g) \circ f\big)(x).$$

(RESTRICTION ET PROLONGEMENTS)

Définition

Soit A une partie de E.

- Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On appelle *restriction de f à A* l'application notée $f|_A$ de A dans F définie pour tout $x \in A$ par : $f_A(x) = f(x)$.
- Soit $f : A \longrightarrow F$ une application. On appelle *prolongement de f à E* toute application g de E dans F pour laquelle pour tout $x \in A$: $f(x) = g(x)$.

Restreindre/prolonger une application, c'est diminuer/augmenter la taille de son ensemble de départ

Attention ! Parce qu'il existe en général beaucoup de prolongements d'une application donnée, on parle d'UN prolongement et non« du » prolongement.

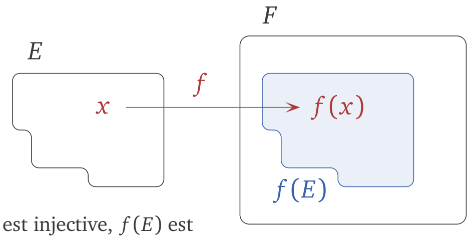
II) Injections, surjections, bijections

1 Injections

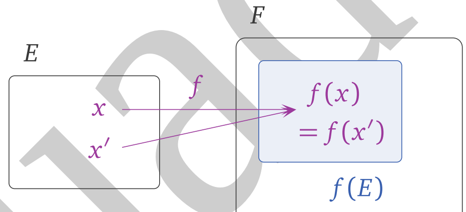
a-Définitions

(Injection) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

- On dit que f est *injective sur* E ou que c'est une *injection sur* E si :
- L'application f est injective lorsque tout élément de F possède AU PLUS UN ANTÉCÉDENT par f soit 0, soit 1.
- L'application f est injective lorsqu'elle donne des valeurs différentes à des points différents— pour tous x, x′ ∈ E, si : x ≠ x, alors : f (x) ≠ f (x′).
- L'application f est injective si et seulement si $\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$.

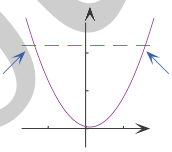


f est injective, $f(E)$ est comme une copie de E à l'intérieur de F.



Ici, f N'est PAS injective.

b-Exemple La fonction carré n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur $\mathbb{R}_+$.



Démonstration

- Pas injective sur $\mathbb{R}$ car : $(-1)^2 = 1^2$ par exemple.
- Injective sur $\mathbb{R}_+$ car pour tous $x, x' \in \mathbb{R}_+$, si : $x^2 = x'^2$, alors : $x = x'$ ou $x = -x'$, mais comme x et x' sont positifs, forcément : $x = x'$.

C-(Injectivité et composition)

Théorème

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

(i) Si f et g sont injectives, $g \circ f$ l'est aussi. (ii)Si $g \circ f$ est injective, alors f l'est aussi.

Démonstration

(i) Soient $x, x' \in E$. Supposant que : $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, nous voulons montrer que : $x = x'$. Or : $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$ et g est injective, donc : $f(x) = f(x')$, mais f étant aussi injective : $x = x'$.

(ii) Soient $x, x' \in E$. Supposant que : $f(x) = f(x')$, nous voulons montrer que : $x = x'$. Or : $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$ et $g \circ f$ est injective, donc en effet : $x = x'$.

d-Théorème (Injectivité et stricte monotonie) Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est strictement monotone, alors f est injective.

Démonstration Supposons f strictement croissante. Soient $x, x' \in A$. On suppose que : $f(x) = f(x')$. Peut-on avoir : $x < x'$? Non, car on aurait alors : $f(x) < f(x')$, alors que : $f(x) = f(x')$. Peut-on avoir : $x' < x$? Non plus, car on aurait alors : $f(x') < f(x)$. Forcément : $x = x'$.

✖ **Attention !** La réciproque est fausse en général comme le montre le graphe de la fonction injective représentée un peu plus haut. Cette fonction est injective sans être monotone, mais du coup elle N'est PAS continue. Nous verrons plus tard en effet qu'une fonction injective et continue sur un intervalle y est toujours strictement monotone.

Exemple La fonction cosinus est injective sur $[0, \pi]$ car strictement monotone — de même sur $[\pi, 2\pi]$ ou $[-\pi, 0]$.

Face à une égalité du type : $\cos x = \cos y$, rappelons qu'on ne peut pas affirmer en général que : $x = y$. On le peut en revanche si x et y se trouvent de fait dans un intervalle sur lequel cosinus est injective.

2-SURJECTIONS

a-Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est *surjective de E* SUR F ou que c'est une *surjection de E* SUR F si :

- f est surjective de E SUR F si et seulement si tout élément de F possède AU MOINS UN ANTÉCÉDENT dans E par f .
- f est surjective de E SUR F si et seulement si $\forall y \in F, \quad \exists\, x \in E, \quad y = f(x),$ ce qui revient à dire que : $f(E) = F$.

b-Remarque:

- Très important également. Parce que tout élément de $f(E)$ possède un antécédent par f, par définition :
- Toute application est surjective de son ensemble de définition SUR SON IMAGE.

c-Exemple La fonction carrée n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, en revanche elle l'est de $\mathbb{R}$ sur son IMAGE $\mathbb{R}_+$.

d-Théorème (Surjectivité et composition) Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

(i) Si f et g sont surjectives, $g \circ f$ l'est aussi.

(ii) Si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est aussi.

Démonstration

(i) Soit $y \in G$. Nous voulons montrer pour un certain $x \in E$: $y = g \circ f(x)$. Or g est surjective, donc : $y = g(t)$ pour un certain $t \in F$. Mais f est aussi surjective, donc : $t = f(x)$ pour un certain $x \in E$. Finalement, comme voulu : $y = g(t) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$.

(ii) Soit $y \in G$. Nous voulons montrer que pour un certain $x \in F$: $y = g(x)$. Or $g \circ f$ est surjective, donc : $y = g \circ f(t)$ pour un certain $t \in E$. Il suffit dès lors de poser : $x = f(t)$.

3-(BIJECTION)

a-Définition

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est injective sur E et surjective de E sur F.
- $\forall y \in F, \quad \exists\,!\, x \in E, \quad y = f(x)$.

Si l'une de ces assertions est vraie, on dit que f est *bijective de E* SUR F ou que c'est une *bijection de E* SUR F.

En d'autres termes : f est bijective de E SUR F si et seulement si tout élément de F possède UN ET UN SEUL ANTÉCÉDENT dans E par f.

b-Théorème (Bijectivité et réciproque) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

f est bijective de E sur F si et seulement si f possède une réciproque.

Une telle réciproque est alors unique, appelée LA réciproque de f et notée f^{-1}. Pour tous $x \in E$ et $y \in F$:

$$y = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(y).$$

Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, cette équivalence signifie géométriquement que le graphe de f et celui de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

c-Exemple Soit $f : E \longrightarrow E$ une application pour laquelle : $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ — on dit dans ce cas que f est une *involution de E*. Alors f est une bijection et : $f^{-1} = f$.

d-Théorème (Bijectivité, réciproque et composition) Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

(i) Si f est bijective de E sur F, f^{-1} est bijective de F sur E et : $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

(ii) Si f et g sont bijectives, $g \circ f$ l'est aussi et : $\left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Attention ! Gare à l'ordre ! C'est bien : $\left(g\circ f\right)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ et non pas : $\left(g\circ f\right)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$. Si vous cachez un trésor dans un coffre (f), puis ce coffre sous terre (g), et si ensuite vous voulez récupérer votre trésor (défaire $g\circ f$), vous devez d'abord déterrer le coffre (g^{-1}), puis l'ouvrir (f^{-1}) — au total : $f^{-1}\circ g^{-1}$.

Démonstration

(i) Si f est bijective, les égalités : $f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_E$ et $f\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_F$ — qui expriment la bijectivité de f — expriment pour la même raison la bijectivité de f^{-1} et cela montre bien que : $\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$.

(ii) Si f et g sont bijectives : $\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)\circ\left(g\circ f\right)=f^{-1}\circ\left(g^{-1}\circ g\right)\circ f=f^{-1}\circ\mathrm{Id}_F\circ f=f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_E$ et $\left(g\circ f\right)\circ\left(f^{-1}\circ g^{-1}\right)=g\circ\left(f\circ f^{-1}\right)\circ g^{-1}=g\circ\mathrm{Id}_F\circ g^{-1}=g\circ g^{-1}=\mathrm{Id}_G$, donc en effet $g\circ f$ est bijective de réciproque $f^{-1}\circ g^{-1}$.

e-Exemple L'application $(x,y)\overset{f}{\longmapsto}\left(2x+y,x^2+y\right)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}^2$ mais elle est bijective de $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur le demi-plan d'équation $y-x+1\geqslant 0$, de réciproque $(x,y)\longmapsto\left(1+\sqrt{y-x+1}\,,\ x-2-2\sqrt{y-x+1}\right)$.

Démonstration Pour tous $(x,y),(a,b)\in\mathbb{R}^2$:

$$(a,b)=f(x,y)\iff\begin{cases}2x+y=a\\x^2+y=b\end{cases}\overset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff}\begin{cases}2x+y=a\\x^2-2x=b-a\end{cases}\iff\begin{cases}y=a-2x\\(x-1)^2=b-a+1.\end{cases}$$

Ainsi, les couples (a,b) pour lesquels : $b-a+1<0$ n'ont pas d'antécédent par f. Plus précisément que l'image de f est exactement $\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\ |\ \ b-a+1\geqslant 0\right\}$, i.e. le demi-plan d'équation $y-x+1\geqslant 0$.

À présent, sous l'hypothèse additionnelle que $b-a+1\geqslant 0$:

$$(a,b)=f(x,y)\iff\left(x=1+\sqrt{b-a+1}\quad\text{ou}\quad x=1-\sqrt{b-a+1}\right)\quad\text{et}\quad y=a-2x.$$

A fortiori, f n'est pas injective sur $\mathbb{R}^2$ puisque tout couple (a,b) pour lequel : $b-a+1>0$ possède exactement deux antécédents. Mais de ces deux antécédents (x,y), nous venons de voir que : $x>1$ pour l'un et : $x<1$ pour l'autre. Dès lors, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $b-a+1\geqslant 0$ et pour tout $(x,y)\in[1,+\infty[\times\mathbb{R}$:

$$(a,b)=f(x,y)\iff(x,y)=\left(1+\sqrt{b-a+1}\,,\ a-2-2\sqrt{b-a+1}\right).$$

Cette équivalence prouve enfin que f est bijective de $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur le demi-plan d'équation $y-x+1\geqslant 0$, de réciproque $(x,y)\longmapsto\left(1+\sqrt{y-x+1}\,,\ x-2-2\sqrt{y-x+1}\right)$.