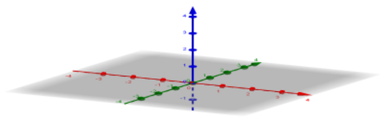
1-BASE ET REPERE DE L'ESPACE

1-1-DEFINITION

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trois vecteurs non nuls, et O un point de l'espace

i- on dit que le triplet $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ est une base de l'espace si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires

ii-on dit que $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ est un repère de l'espace si $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ est une base de l'espace



1-2-COORDONNEES D'UN POINT- D'UN VECTEUR

PROPRIETE

Soit $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ un repère dans l'espace. Pour tout point M, il existe un triplet de réel unique (x,y,z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. x est appelé l'abscisse, y l'ordonnée, z la cote du point Met on le note M(x,y,z). les nombres x, y, z sont appelés les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ et on note $\overrightarrow{OM}(x,y,z)$

1-3-COORDONNES D'UN VECTEUR $\overrightarrow{AB}$

PROPRITE

L'espace est muni d'un repère $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, soient $A\ x_A, y_A, z_A$ et $B\ x_B, y_B, z_B$ deux points de l'espace, on a: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$

1-EGALITE DE DEUX VECTEURS

PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, soient $\vec{u}\ x, y, z$ et $\vec{v}\ x', y', z'$ deux vecteurs de l'espace, on a: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x' \qquad y = y' \qquad z = z'$

1-5-MILIEU D'UN SEGMENT

PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, on considère les points $A\ \ x_A, y_A, z_A$ et

$B\ \ x_B, y_B, z_B$ dans l'espace. Si I est le milieu de [AB], alors $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

1-6-COLINEARITE DES VECTEURS

a-PROPRIETE

Soit $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ une base de l'espace, et $\vec{u}\ \ a,b,c$ et $\vec{v}\ \ a',b',c'$ deux vecteurs non nuls

i- les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si : $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}=0$ et $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}=0$ et

$\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}=0$

ii- si a, b, et c sont non nuls alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$

b-REMARQUE

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\neq 0$ ou $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\neq 0$ ou $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\neq 0$

c-EXERCICE

Soient $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{v}=-\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{w}=(m^2-1)\vec{i}+2m\vec{j}+2(m^2-m-1)\vec{k}$

1- étudier la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

2- déterminer m pour que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires

2-COPLANARITE DE TROIS VECTEURS

2-1- DETERMINANTS DE TROIS VECTEURS

a-DEFINITION

Soient $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ une base de l'espace , et $\vec{u}\ \ a,b,c$, $\vec{v}\ \ a',b',c'$ et $\vec{w}\ \ a'',b'',c''$ trois vecteurs de l'espace. Le déterminant des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre , qu'on note $\det\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}$ définit par: $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$

b-EXERCICE

Soient $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{v}=-3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{w}=5\vec{i}+\vec{k}$ et $\vec{x}=(m-1)\vec{i}+2m\vec{j}+3\vec{k}$

1-calculer $\det\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}$

2- déterminer m pour que $\det\ \vec{u},\vec{v},\vec{x}\ =0$

2-2-COPLANARITE DE TROIS VECTEURS

a-PROPRIETE

Soit $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ une base de l'espace , soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace

1-les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=0$

2- les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si et seulement si $\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\neq 0$

b-EXERCICE

l'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, considérons les points $A\left(-3,2,0\right)$, $B\left(1,-1,2\right)$,

$C\left(4,-3,5\right)$, $D\left(-1,1,1\right)$ et $E\left(2m-1,m+1,3\right)$

1- calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$
2- est ce que les points A, B, C et D sont coplanaires
3- déterminer m pour que A, B, C et E soient coplanaires

3-REPRESENTATION PARAMETRIQUE D'UNE DROITE

3-1-DEFINITION

l'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, soit $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ un point de l'espace et $\vec{u}\left(a,b,c\right)$ un vecteur non nul. Le système: $\begin{cases} x=x_A+ta \\ y=y_A+tb \\ z=z_A+tc \end{cases}$ est appelé représentation paramétrique de la droite (D) qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{u}$

3-2-EXERCICE

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A(1,-2,1), B(0,1,-1) et C(2,0,3)
1-déterminer la représentation paramétrique de la droite (AB)
2- est ce que C est un point de (AB)

3-3-DEUX EQUATIONS CARTESIENNES DE LA DROITE

a-PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, (D) une droite qui passe par $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(a,b,c\right)$

i- si $abc\neq 0$ alors le système $\dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b}=\dfrac{z-z_A}{c}$ est appelé équation cartésienne de la droite (D)

ii- si c=0 et $ab\neq 0$ alors le système $\begin{cases} \dfrac{x-x_A}{a}=\dfrac{y-y_A}{b} \\ z-z_A=0 \end{cases}$ est appelé équation cartésienne de la droite (D)

b-EXERCICE

Soit (D) une droite définit par l'équation cartésienne: $\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{3-4z}{4}$

1-déterminer le vecteur directeur de (D)
2- déterminer la représentation paramétrique de la droite (D)

4- LE PLAN DANS L'ESPACE

4-1-REPRESENTATION PARAMETRIQUE DU PLAN

a-DEFINITION

l'espace est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soient $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace, $\vec{u}(a,b,c)$ et $\vec{v}(a',b',c')$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Le système

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha a + \beta a' \\ y = y_A + \alpha b + \beta b' \\ z = z_A + \alpha c + \beta c' \end{cases}$$

est appelé la représentation paramétrique du plan (P) qui passe par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on écrit $P = P(A,\vec{u},\vec{v})$, le triplet $(A,\vec{u},\vec{v})$ est le repère du plan (P)

b-EXERCICE

soient A(-1,1,1), B(0,2,-1) et C(-1,0,3) trois points de l'espace (P) muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1-montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
2-déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC)
3- le point D(2,-2,3) appartient-il au plan (ABC)

4-2-EQUATION CARTESIENNE DU PLAN

a-DEFINITION

l'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soit (P) le plan qui passe par $A(x_A,y_A,z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\vec{v}(\alpha',\beta',\gamma')$. l'équation cartésienne du plan (P) s'écrit sous forme de : $ax+by+cz+d=0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

Démonstration

b-EXXERCICE

Soient A(1,-1,1), B(2,0,-1) et C(-1,0,3) trois points de l'espace muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1- montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
2- déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC)
3-le point E(3,1,-1) appartient il au plan (ABC)
4- déterminer m pour que le point E(m-1,-2,5) appartient au plan (ABC)

5-LES POSITIONS RELATIVES DES DROITES ET DES PLANS

5-1- POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

a-PROPRIETE

l'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soient (D) une droite qui passe par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ et (D') une droite qui passe par B et de vecteur directeur $\vec{v}$

1- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et ($A \in (D')$ ou $B \in (D)$) alors (D)=(D')

2- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et ($A \notin (D')$ ou $B \notin (D)$) alors (D)//(D')

3- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ,(D) et (D') sont coplanaires alors (D) et (D') se coupent en un point

4- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, et $(D)\cap(D')=\varnothing$ alors (D) et (D') ne sont pas coplanaires

b-EXERCICE

étudier les positions relatives des droites (D) et (D') dans les cas suivants

$$(D):\begin{cases}x=1+t\\ y=2-2t\\ z=-2+3t\end{cases} \quad \text{et} \quad (D'):\begin{cases}x=1+3t'\\ y=2-t'\\ z=3-t'\end{cases}$$

5-2-POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

a-PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, soient (D) une droite qui passe par $A\ \ x_A, y_A, z_A$

et de vecteur directeur $\vec{u}\ \ \alpha,\beta,\gamma$ et le plan (P) d'équation cartésienne:

$ax+by+cz+d=0$

1- $(D)//(P) \Leftrightarrow a\alpha+b\beta+c\gamma=0$

2- $(D)\cap(P)=\ \ C \ \Leftrightarrow a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$

Démonstration

b-EXERCICE

étudier les positions relatives de la droite (D) et le plan (P)

$$(D):\begin{cases}x=t\\ y=1+4t\\ z=-1-t\end{cases} \quad \text{et} (P): -2x+y+2z+1=0$$

5-3-POSITION RELATIVE DE DEUX PLANS

a-PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, soient (P) et (P') deux plans définis par:

(P): ax+by+cz+d=0 et (P'): a'x+b'y+c'z+d'=0

1- $P\ //\ P' \Leftrightarrow \begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix}=0$

2- $P\ \cap\ P'\ \neq\varnothing \Leftrightarrow \begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\neq 0$ ou $\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}\neq 0$ ou $\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix}\neq 0$

Dans ce cas (P) et (P') se coupent selon une droite

b-REMARQUE

si a, b et c sont tous non nuls alors on a:

1- $P\ //\ P' \Leftrightarrow \dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c}$

2- (P) et (P') se coupent selon un droite si $\dfrac{a'}{a}\neq\dfrac{b'}{b}$ ou $\dfrac{a'}{a}\neq\dfrac{b'}{b}$ ou $\dfrac{b'}{b}\neq\dfrac{c'}{c}$

c-EXERCICE

étudier les positions relatives de (P) et (P')

(P): x-2y+z-1=0 et (P): 3x-y+2z+4=0