I. Fonction logarithme népérien

1) Définition :

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$. elle admet donc des primitives sur cet intervalle

On appelle fonction logarithme népérien qu'on note $\ln$, la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 .

Conséquences :

- La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$; sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

  $\forall x \in]0;+\infty[\,;(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $\ln(1) = 0$

2) Première propriété de la fonction $\ln$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$.

Donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0;[\infty$

Conséquences

Pour tous réels strictement positifs a et b , on a : $\boxed{\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \text{ et } \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b}$

Pour tout $\;>1$, on a $\ln x > 0$ et pour tout $0 \quad <1$,on a $\ln x \quad 0$

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln \; 3 \quad x \; < 0$

Propriété :

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction composée $\ln(u)$ est dérivable sur I et on a : $(\ln(u))' \;\; \frac{u'}{u}$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, préciser le domaine de définition de et calculer sa dérivée

$f(x) = \ln(x+4)$; $f(x) = \ln x + 4$; $f \;\; x) \;\; \ln \;\; x^2 + 4)$;

$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x \;\; +4}\right)$; $f(x) = \ln|x+4|$

Propriétés :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annule pas sur I alors :

- $\forall x \in I \;\; : (\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$
- Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ s'écrivent sous la forme :

  $x \mapsto \ln|u(x)| + c \,/\, c \in \mathbb{R}$

3) Relations importantes

Propriétés

Soient a et b deux réels strictement positifs. On a :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n$

avec $a_1, a_2, ... et\, a_n$ sont des réels strictement positifs

$\ln(a^n) = n \ln a$, pour tout n de $\mathbb{Z}$

$\forall r \in \mathbb{Q}; \ln(a^r) = r \ln a$. en cas particulier $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Exercice 6 :

Simplifier les expressions suivantes :

$$\ln 2+\ln\frac{1}{2} \quad ; \quad \ln 2+\ln 4-\ln 8 \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{3}\right)+2\ln\sqrt{3} \quad ; \quad \ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Exercice 7 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln x-\sqrt{x}$

Etudier le signe de $f(x)$.

4) **Etude de la fonction** $\ln$

- **Théorème admis:** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$

En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

- $\forall x\in]1;+\infty[\quad 0<\dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) au voisinage de $+\infty$

Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$

- **Le nombre** e **:**

La fonction $\ln$ est continue, strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\ln(]0;+\infty[)=]-\infty;+\infty[$

Donc l'équation $\ln x=1$ admet une seule solution dans $]0;+\infty[$ qu'on note e :

$e\approx 2,7182818285...$

e est un nombre irrationnel et $\ln e=1$

Remarque:

Les valeurs approchées $\ln 2\approx 0,7$ et $\ln 3\approx 1,1$ sont à connaitre.

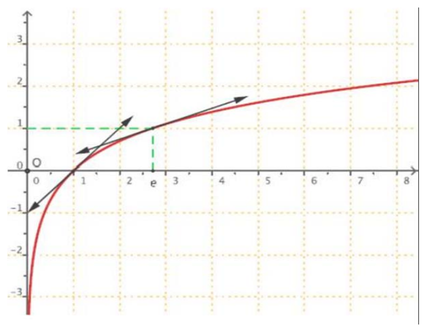
La tangente à la courbe de la fonction $\ln$ au point d'abscisse 1 est $(T): y=x-1$

La tangente au point d'abscisse e a pour équation : $y=\dfrac{1}{e}x$

- **Tableau de variation:**

x	0		1		e		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\|$			$+$			
$\ln(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- **Courbe représentative:**



5) **Propriétés**

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. En particulier , en 1 .

Donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\ln'(1)=\dfrac{1}{1}=1$ d'où $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ (on pose $h=1+x$)

Exercice 9 :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}-\ln x \;;\; \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{3+2x^2}\right) \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3\ln x} \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x} \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\ln x} \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln x} \;;\; \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\ln x}{x} \;;\; \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{x} \quad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \;;\; \lim_{x\to 0^-}\left(x\ln\left(x^2-x\right)\right)$$

Théorème

Pour tout entier naturel non nul n , on a:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0 \quad et \quad \lim_{x\to 0^+} x^n\ln x=0$$

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0 \quad et \quad \lim_{x\to 0^+} x^3\ln x=0$$

III. Fonction logarithme de base a

1. Définition

Soit a un réel strictement positif et diffèrent de 1

La fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $x\mapsto\dfrac{\ln x}{\ln a}$ s'appelle fonction logarithme de base a. Notée: $\log_a$

2. Remarque :

La fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e .En fait :

$\forall x\in\,]0;+\infty[\,;\ \log_e(x)=\dfrac{\ln x}{\ln e}=\ln x$

$\forall a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}\quad;\quad \log_a(a)=1$

Et $\quad\forall r\in\mathbb{Q}\quad;\quad \log_a(a^r)=r$

3. Propriétés:

soit a un réel strictement positif et diffèrent de 1

Pour tout $x\ et\ y\ de\ \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $r\ de\ \mathbb{Q}$, on a :

$\log_a xy=\log_a x+\log_a y\log_a \quad , \quad \log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y \quad , \quad (x^r)=r\log_a(x)$

4. Etude de la fonction $\log_a$

Dérivée de la fonction $\log_a$

$\forall x\in\,]0;+\infty[\ :\ [\log_a(x)]'=\dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{x}$

5. Cas particulier : Fonction logarithme décimal

Définition

La fonction logarithme de base 10 , s'appelle fonction logarithme décimal notée log

Remarques

$\forall x\in\,]0,+\infty[\qquad \log x=\log_{10}(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln 10}\qquad \dfrac{1}{\ln 10}\simeq 0,434$

$\forall m\in\mathbb{Z}\qquad \log 10^m=m$

Exercice11:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : **Log(x-2)+Log(x+2)=3**
2. Résoudre dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x+y=65 \\ \log x+\log y=3 \end{cases}$

Exercice 12 :

Dans tous les cas suivants, étudier et représenter graphiquement la fonction f :

a) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$, b) $\begin{cases} f(x)=x^2\ln x-\dfrac{x^2}{2} & x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$, c) $f(x)=\ln\left|x^2-3x+2\right|$