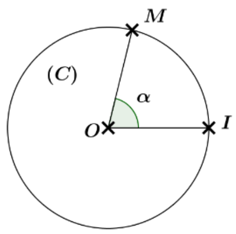
Le contenu

I. *Unités de mesure des angles : Radian et grade*

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon R et soient I et M deux points du cercle (C) et α est la mesure de l'angle $I\hat{O}M$:
$I\hat{O}M = \alpha°$ et $0 \leq \alpha \leq 360°$.



⊗ Déterminons l la longueur de l'arc IM :

On sait que le périmètre du cercle (C) est $2\pi R$.

Donc : $\begin{array}{l} 2\pi R \leftrightarrow 360° \\ \quad l \leftrightarrow \alpha° \end{array}$

Par conséquent: $l = \dfrac{2\alpha\pi R}{360} = \dfrac{\alpha\pi R}{180}$.

Dans tous ce qui suit on s'intéresse à la mesure de l'angle $I\hat{O}M$, c'est pour cette raison qu'on pose $R = 1$.

Définition :

Soit (C) un cercle de centre O et de rayon $R = 1$ et soient I et M deux points de (C).

La mesure de l'angle géométrique $I\hat{O}M$ en radians est la longueur de l'arc IM.

Remarque :

$1rad$ est la mesure d'un angle qui intercepte un arc sur le cercle $C(O,1)$ de longueur 1.

Proportionnalité des unités de mesure des angles :

Il existe trois unités de mesure des angles : Degré, Radian et grade.

La mesure d'un angle plat en degrés est $180°$ et en radians est π et en grades est $200gr$. C'est-à-dire : $180^0 = \pi rad = 200gr$.

Définition :

Si x, y et z sont les mesures respectives d'un angle géométrique en degrés, radians et en grades, alors: $\dfrac{x}{180} = \dfrac{y}{\pi} = \dfrac{z}{200}$.

Exemple :

Déterminons en radians la mesure d'un angle sa mesure en degrés est : $45°$.

On a : $\begin{array}{l} \pi \leftrightarrow 180° \\ a \leftrightarrow 45° \end{array}$.

Donc: $a = \dfrac{45\pi}{180} = \dfrac{\pi}{4} rad$.

Application ①:

Compléter le tableau suivant:

Mesure en degrés	0	30	45	60	90		120	
Mesure en radians						$\frac{\pi}{8}$		2π

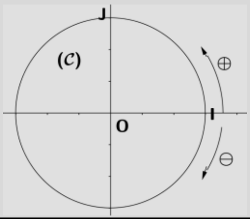
II. Cercle trigonométrique- Abscisses curvilignes d'un point :

1. Cercle trigonométrique :

Définition :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, le cercle trigonométrique (C) est un cercle de centre O et de rayon 1 et orienté dans le sens ***direct*** ou ***positif*** (le sens contraire des aiguilles d'une montre).

Le point I est appelé ***l'origine*** du cercle (C).



2. Abscisses curvilignes d'un point d'un cercle trigonométrique :

Définition :

Soit (C) un cercle trigonométrique.

Tout réel α est représenté sur (C) par un unique point M.

Le nombre α est appelé ***une abscisse curviligne*** du point M et on écrit $M(\alpha)$.

Remarques :

- ⊗ Si α est une abscisse curviligne d'un point M, alors tout nombre écrite sous la forme $\alpha + 2k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$ est aussi une abscisse curviligne de M.
- ⊗ Parmi toutes les abscisses curvilignes d'un point M une seule appartient à l'intervalle $]-\pi,\pi]$: c'est l'abscisse curviligne ***principale***.

Exemple :

Déterminons l'abscisse principale du point $M\left(\frac{37\pi}{3}\right)$.

- ***Méthode ①:***

On a : $\frac{37\pi}{3} = \frac{36\pi+\pi}{3} = 12\pi + \frac{\pi}{3}$.

Donc l'abscisse principale du point M est $\frac{\pi}{3}$.

- ***Méthode ②:***

Soit α_0 l'abscisse principale du point M.

On a : $\frac{37\pi}{3} = \alpha_0 + 2k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

Donc : $\alpha_0 = \frac{37\pi}{3} - 2k\pi$.

Or $-\pi \prec \alpha_0 \leq \pi$, alors $-\pi \prec \frac{37\pi}{3} - 2k\pi \leq \pi$.

Par suite : $\frac{34}{6} \leq k \prec \frac{40}{6}$ c-à-d $5,66 \leq k \prec 6,66$.

Puisque $k \in \mathbb{Z}$, alors : $k = 6$.

D'où l'abscisse principale du point M est $\alpha_0 = \frac{37\pi}{3} - 2\times 6\pi = \frac{\pi}{3}$.

✍ ***Application②: Exercice ① de la série.***

✍ ***Exercice: Exercice ② de la série.***

❍ *Conséquence :*

Si x et y sont deux abscisses curvilignes d'un point M, alors il existe un entier k tel que : $x - y = 2k\pi$.

On écrit dans ce cas : $x \equiv y\,[2\pi]$ et on dit que x est ***congru*** à y ***modulo*** 2π.

✍ ***Application③:***

Vérifier si la relation $x \equiv y\,[2\pi]$ est vraie dans les cas suivants :

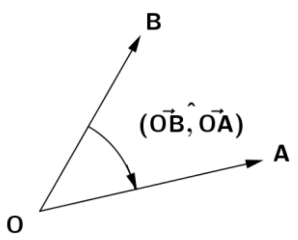
- $x = \frac{43\pi}{12}$ *et* $y = -\frac{5\pi}{12}$
- $x = \frac{-13\pi}{8}$ *et* $y = \frac{9\pi}{4}$

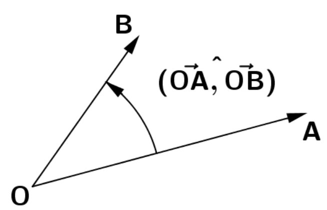
III. *Angle orienté de deux demi droites ayant même origine- Angle orienté de deux vecteurs :*

On considère (P) le plan orienté dans le sens direct rapporté au repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ et soient A et B deux points de (P).

L'angle formé par les demi droites $[OA)$ et $[OB)$ est appelé ***angle orienté*** de $[OA)$ et $[OB)$ et on le note par (OA,OB).

Cet angle est appelé aussi ***angle orienté*** de deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ et le note par $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.





❍ *Remarques :*

⊗ Si α est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$, alors tout nombre écrite sous la forme $\alpha + 2k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$ est aussi une mesure de cet angle. On écrit $\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv \alpha\,[2\pi]$.

⊗ Parmi toutes les mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ une seule appartient à l'intervalle $]-\pi,\pi]$: c'est la mesure ***principale***.

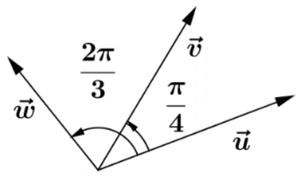
Propriété : (Relation de Chasles)

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté. On a :

$$\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)+\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)\equiv\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right)[2\pi]$$

Application④:

Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)$ sachant que :



Conséquence :

Soient $A(\alpha)$ et $B(\beta)$ deux points sur un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I . On a : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\beta-\alpha[2\pi]$.

Application⑤

Soit (C) d'un cercle trigonométrique (C) de centre O et soient M et N deux points de (C) d'abscisses curvilignes respectives $-\frac{37\pi}{3}$ et $\frac{65\pi}{6}$.

1) Trouver les abscisses curvilignes principales de M et N.

2) Monter que : $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ puis déduire la nature du triangle OMN .

Propriété : (Relation de Chasles)

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On a :

- $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}\right)[2\pi]$.
- $\left(\overrightarrow{-u},\overrightarrow{-v}\right)\equiv\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$.
- $\left(\overrightarrow{-u},\overrightarrow{v}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$.
- $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{-v}\right)\equiv\pi+\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)[2\pi]$.

Application⑥: Exercice ⑥ de la série.

IV. Rapports trigonométriques d'un nombre réel :

Activité ①:

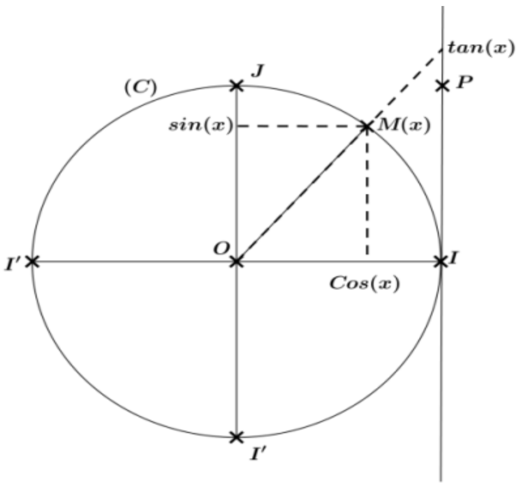
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB=3$ et $BC=4$.

Calculer $\sin\hat{B}$, $\cos\hat{B}$ et $\tan\hat{B}$.

1. Sinus-Cosinus-Tangente d'un nombre réel :

Soient (C) d'un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I et J le point de (C) tel que : $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit M un point de (C) d'abscisse curviligne x et soit (Δ) la droite passante par I et parallèle (OJ).



Définition:

- On appelle l'abscisse du point M dans le repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ par ***cosinus*** du nombre réel x et on le note par : $\cos(x)$.
- On appelle l'ordonnée du point M dans le repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ par ***sinus*** du nombre réel x et on le note par : $\sin(x)$.
- On suppose que M différente à J et J' :

L'abscisse du point T d'intersection de (Δ) et (OM) dans le repère (I,P) est appelé ***tangente*** du nombre réel x et on le note par : $\tan(x)$.

Exemples :

Déterminons cosinus et sinus des points suivants : $I(0)$, $J(\frac{\pi}{2})$, $I'(\pi)$ et $J'(-\frac{\pi}{2})$.

Dans le repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ on a :

- Les coordonnées du point I sont: $(1;0)$, donc : $\cos(0)=1$ et $\sin(0)=0$.
- Les coordonnées du point J sont: $(0;1)$, donc : $\cos(\frac{\pi}{2})=0$ et $\sin(\frac{\pi}{2})=1$.
- Les coordonnées du point $(-1;0)$ sont: $(-1;0)$, donc : $\cos(\pi)=-1$ et $\sin(\pi)=0$.
- Les coordonnées du point J' sont: $(0;-1)$, donc : $\cos(-\frac{\pi}{2})=0$ et $\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$.

Conséquences :

Pour tout réel x on a les conséquences suivantes :

- $-1\leq\cos(x)\leq 1$ *et* $-1\leq\sin(x)\leq 1$.
- D'après le théorème de Pythagore : $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.
- Puisque x et $x+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$ deux abscisses curvilignes de même points, alors:
  $\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$, $\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$ et $\tan(x+2k\pi)=\tan(x)$.
- Pour tout réel x différent à $\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}$, on a :

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ et } 1+\tan^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Application⑦: Exercice ⑦ de la série.

✍ *Exercice ⑨ de la série.*

2. Signe de cosinus – sinus – tangente d'un nombre réel :

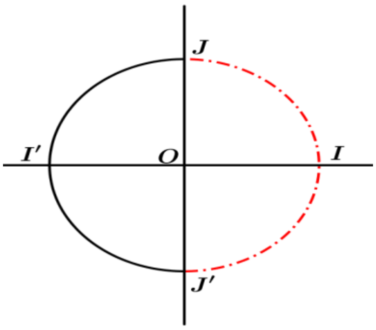
Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I et soit M un point de (C) d'abscisse curviligne x.

❁ Signe de $\cos(x)$ sur IR

$\cos(x) \geq 0$ si M est un point de l'arc rouge .

Donc le signe de $\cos(x)$ sur $]-\pi,\pi]$:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$cos(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

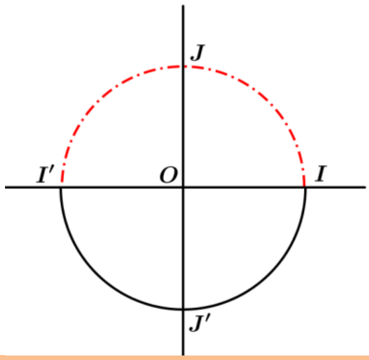


❁ Signe de $\sin(x)$ sur IR

$\sin(x) \geq 0$ si M est un point de l'arc rouge .

Donc le signe de $\tan(x)$ sur $]-\pi,\pi]$:

x	$-\pi$		0		π
$sin(x)$		$-$	0	$+$	

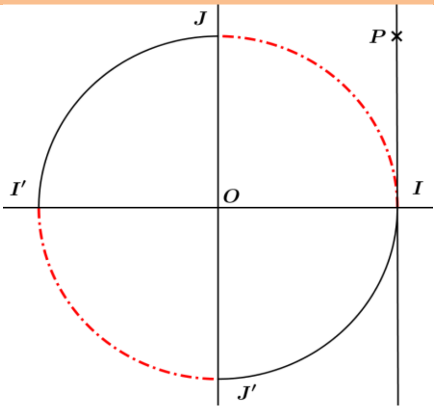


❁ Signe de $\tan(x)$ sur IR tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$

$\tan(x) \geq 0$ si M est un point de l'arc rouge .

Donc le signe de $\tan(x)$ sur $]-\pi,\pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$tan(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0



✍ *Application⑧: Exercice ⑩ de la série.*

3. Relations entre les rapports trigonométriques :

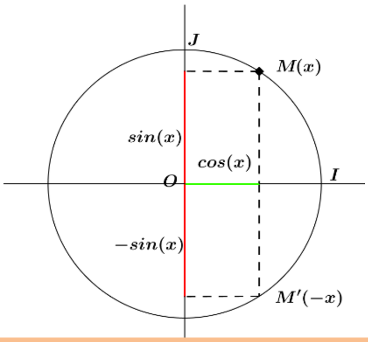
Pour tout réel x on a les relations suivantes:

❁ La relation entre les rapports trigonométriques de x et de $-x$

- $\cos(-x) = \cos x$

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\tan(-x) = -\tan(x)$ tel que

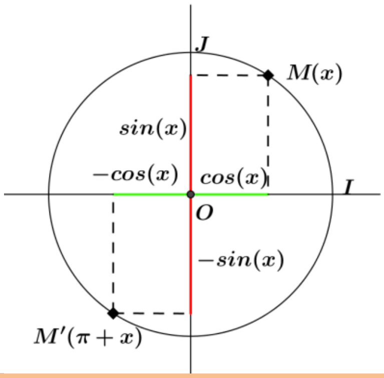
  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$



La relation entre les rapports trigonométriques de x et de $\pi + x$

- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ tel que :

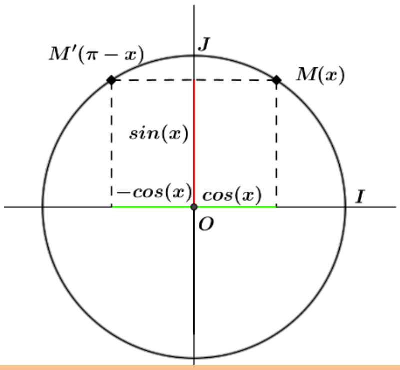
  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$



La relation entre les rapports trigonométriques de x et de $\pi - x$

- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$ tel que:

  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$

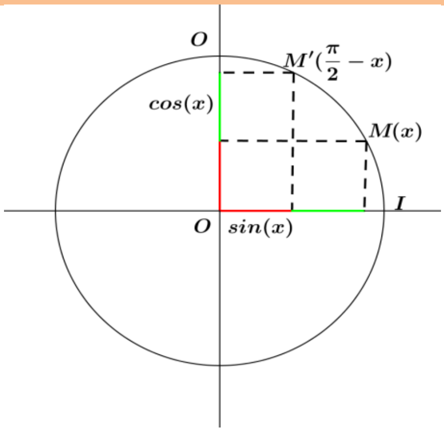


La relation entre les rapports trigonométriques de x et de $\frac{\pi}{2} - x$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}$ tel que:

  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$ et

  $x \neq k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}$



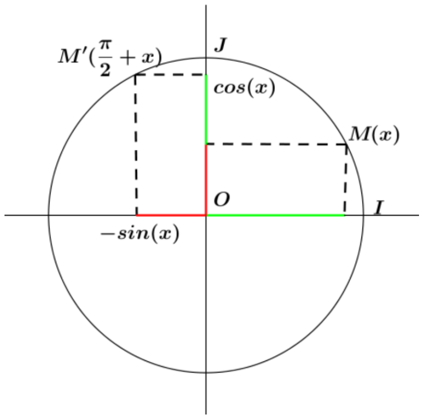
La relation entre les rapports trigonométriques de x et de $\frac{\pi}{2} + x$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\dfrac{1}{\tan(x)}$ tel que :

  $x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi / k \in \mathbb{Z}$ et

  $x \neq k\pi / k \in \mathbb{Z}$



Application⑨: Exercice ①② de la série

4. Rapports trigonométriques pour des angles usuels :

On a le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Application⑩:

Calculer $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right), \sin(\dfrac{65\pi}{4})$ *et* $\tan(\dfrac{19\pi}{6})$.

Exercice ①④ de la série.

V. Equations et inéquations trigonométrique fondamentales:

1. Equations du type $\cos(x)=a$ et inéquations $\cos(x)\geq a$ et $\cos(x)\leq a$

Propriété

Soit a un nombre réel.

- Si $|a| \succ 1$, alors l'équation $\cos(x)=a$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.
- Si $|a|\leq 1$, alors il existe un réel α tel que $\cos(\alpha)=a$ et par suite les solutions de l'équation $\cos(x)=a$ sont : $\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$ ou $-\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}$.

Exemple :

Résoudrons dans $[0,2\pi]$ l'équation $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$ et l'inéquation $\cos(x)\leq\dfrac{1}{2}$.

Application①①:

Résoudre dans l'intervalle I les équations et les inéquations suivantes :

- $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(x)\prec\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ avec $I=[-\pi,\pi]$.
- $2\cos(x)+\sqrt{3}=0$ et $2\cos(x)+\sqrt{3}\geq 0$ avec $I=[-\pi,3\pi]$.

2. Equations du type $\sin(x)=a$ et inéquations $\sin(x)\geq a$ et $\sin(x)\leq a$

Propriété

Soit a un nombre réel.

- Si $|a| \succ 1$, alors l'équation $\sin(x)=a$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.
- Si $|a| \leq 1$, alors il existe un réel α tel que $\sin(\alpha)=a$ et par suite les solutions de l'équation $\sin(\alpha)=a$ sont : $\alpha+2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ ou $\pi-\alpha+2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

Exemple :

Résoudrons dans $[-\pi,\pi]$ l'équation $\sin(x)=\frac{1}{2}$ et l'inéquation $\sin(x)\leq\frac{1}{2}$.

Application①②:

Résoudre dans l'intervalle I les équations et les inéquations suivantes :

⊗ $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x)\prec\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec $I=[0,2\pi]$.

⊗ $2\sin(x)+\sqrt{3}=0$ et $2\sin(x)+\sqrt{3}\geq 0$ avec $I=[-2\pi,\pi]$.

3. Equations du type $\tan(x)=a$ et inéquations $\tan(x)\geq a$ et $\tan(x)\leq a$

Propriété

On considère l'équation $\tan(x)=a$ où $a\in\mathbb{R}$.

Soit S son ensemble de solutions.

Il existe un réel α tel que $\tan(\alpha)=a$ et on a $S=\{\alpha+k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.

Exemple :

Résoudrons dans $[-\pi,\pi]$ l'équation $\tan(x)=\sqrt{3}$ et l'inéquation $\tan(x)\leq\sqrt{3}$.

Application①③:

Résoudre dans l'intervalle I les équations et les inéquations suivantes :

⊗ $\tan(x)=1$ et $\tan(x)\prec 1$ avec $I=[0,2\pi]$.

⊗ $\tan(x+\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}=0$ et $\tan(x+\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\geq 0$ avec $I=[-2\pi,\pi]$.

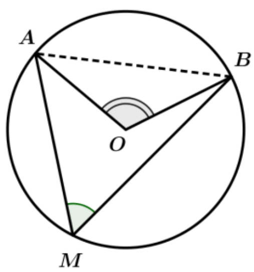
VI. Angles inscrits et quadrilatères inscriptibles :

1. Angles inscrits – Angles au centre :

Soient (C) un cercle de centre O, et $[AB]$ une corde de (C) et M un point de (C).

L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé ***angle inscrit*** interceptant la corde $[AB]$ sur le cercle (C).

L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé ***angle au centre*** interceptant la corde $[AB]$ sur le cercle (C).



On a : $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$.

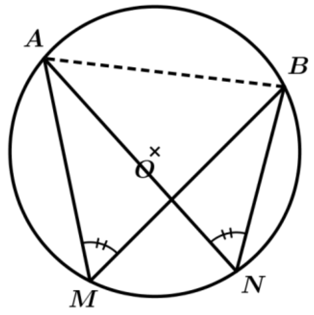
Application①④:

Soit (C) un cercle de diamètre $[AB]$.

Montrer que pour tout C du cercle (C) le triangle ABC est rectangle en C.

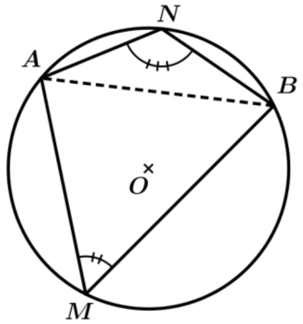
Propriété :

Deux angles inscrits dans un cercle interceptant la même corde sont isométriques ou supplémentaires.



$\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$

Angles isométriques



$\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = \pi$

Angles supplémentaires

2. Les quadrilatères inscriptibles :

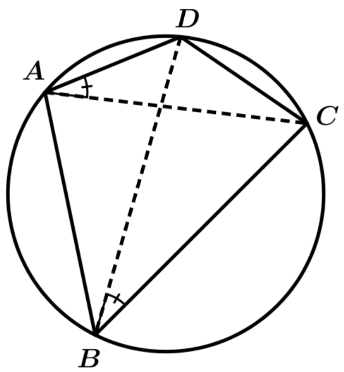
Définitions :

Un ***quadrilatère inscriptible*** est un quadrilatère dont les sommets se trouvent tous sur un seul et même cercle. Les sommets sont dits ***cocycliques***. Le cercle est dit ***circonscrit*** au quadrilatère.

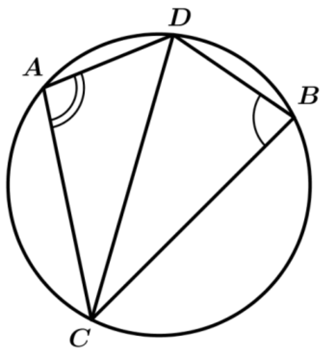
Propriété :

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et soit D un point du plan.

Le point D appartenant au cercle (C) si et seulement si $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi$ ou $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$.



$\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$



$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi$

VII. Lois de sinus dans un triangle :

1. Surface d'un triangle :

Théorème :

Soit ABC un triangle de surface S.

On pose $a = BC, b = AC$ et $c = AB$. On a :

$$S = \frac{1}{2}ab\sin(C) = \frac{1}{2}ac\sin(B) = \frac{1}{2}bc\sin(A)$$

Démonstration :

Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

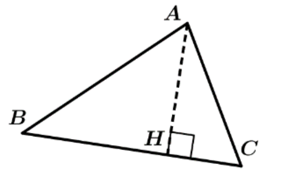
On sait que : $S=\frac{1}{2}BC\times AH$.

Or $\sin(C)=\frac{AH}{AC}$, alors $AH=AC\times\sin(C)$.

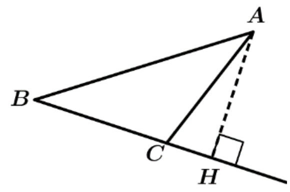
Par conséquent : $S=\frac{1}{2}BC\times AC\times\sin(C)=\frac{1}{2}ab\sin(C)$.

De la même procédure on montre que : $S=\frac{1}{2}ac\sin(B)$ et

$S=\frac{1}{2}bc\sin(A)$.



Ou



✍ *Application①⑤:*

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB=3$.

Calculer la surface de ce triangle.

2. Lois de sinus dans un triangle :

Théorème :

Soit ABC un triangle et soit R le rayon de cercle circonscrit au triangle ABC .

On pose $a=BC, b=AC \text{ et } c=AB$.

On a : $\frac{\sin(A)}{a}=\frac{\sin(B)}{b}=\frac{\sin(C)}{c}=\frac{1}{2R}$.

✍ *Application①⑥: Exercice ②③ de la série.*

Théorème :

Soient ABC un triangle et p son périmètre et r est le rayon de cercle inscrit au triangle ABC.

On a : $S=\frac{1}{2}pr$.

Démonstration :

On considère la figure ci-contre :

On a: $S_{ABC}=S_{AOC}+S_{AOB}+S_{BOC}$.

$$=\frac{1}{2}r\times AC+\frac{1}{2}r\times AB+\frac{1}{2}r\times BC$$

$$=\frac{1}{2}r(AB+AC+BC)$$

$$=\frac{1}{2}pr.$$