Fonctions numériques

I) Généralités

1) Fonctions numériques d'une variable réelle

a) Définition

Une fonction numérique f (d'une variable réelle) est une relation qui permet d'associer à chaque réel x un nombre réel au plus y que l'on note y= f(x)

- *Le réel $f(x)$ s'appelle **image** de x par la fonction f*
- *Le réel x s'appelle **antécédent** de y par la fonction f*

On écrit $f : x \to f(x)$ On lit aussi : la fonction f qui à x associe $f(x)$

b) Exemples

Exp1 : Fonctions affines

$f : x \to 2x-1$; $g(x) = 3x+4$

On a : $f(2) = 2.2-1 = 3$ *3 est l'image de 2 par f*

2 est un antécédent de 3 par f

$g(-3) = 3.(-3)+4 = -5$ *- 5 est l'image de -3 par f*

Exp2 : $h(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

$h(2) = \dfrac{2.2+1}{2-1} = 5$; *5 est l'image de 2 par h*

2 est un antécédent de 5 par f

$h(1) = \dfrac{2.1+1}{1-1} = \dfrac{3}{0}$ *ce qui est impossible*

On dit alors le nombre 1 n'admet pas d'image par h

Pour pouvoir calculer h(x) il faut que $x-1 \neq 0$ c'est à dire $x \neq 1$

donc pour la fonction h : le seul nombre réel qui n'a pas d'image est 1 c'est-à-dire l'ensemble des réels qui ont une image par h est l'ensembles des tous les réels différents de 1 et on le note

$D_h = \mathbb{R} - \{1\}$ *ou encore* $D_h =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

*L'ensemble D_h s'appelle **ensemble (domaine)de définition de h***

c) Ensemble de définition d'une fonction :

- ***Définition :*** *f étant une fonction numérique à variable réelle, l'ensemble des nombres réels qui admettent une image par f est appelé ensemble (ou domaine) de définition de f noté souvent par D_f ou D*

On a ainsi $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}\}$

Ou encore $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$

- ***Exemples :*** *déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes en les écrivant sous forme d'intervalles ou de réunion d'un intervalles .*

$f(x) = 2x-5$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$; $h(x) = x^2 - 3x$; $l(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x}$

- $f(x)$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *c'est à dire tous les nombres réels ont une image par f donc* $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
- $D_g = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

  $D_g = \mathbb{R}^*$ *ou* $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ *ou* $D_g =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
- $h(x)$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *c'est à dire tous les nombres réels ont une image par h donc* $D_h = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
- $D_l = \{x \in \mathbb{R} / l(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x \neq 0\}$

  $D_l = \{x \in \mathbb{R} / x(x-3) \neq 0\}$

  $D_l = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x \neq 3\}$

  $D_l = \mathbb{R} - \{0, 3\} =]-\infty, 0[\cup]0, 3[\cup]3, +\infty[$

- ***Exercices :*** *déterminer le domaine de définition de chacune des*

d) Représentation graphique d'une fonction

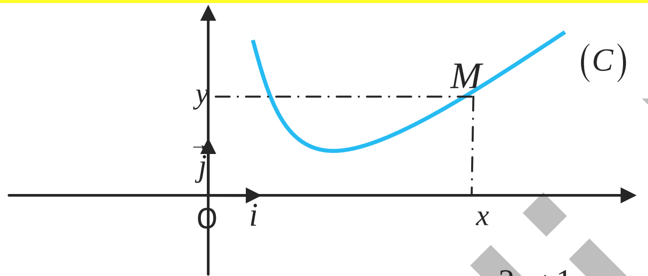
- **Définition :** Le plan (P) étant rapporté à un repère ,
 f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition
 L'ensembles des points $M(x, f(x))$ du plan où $x \in D_f$
 s appelle **courbe représentative** de f dans le repère

On la note souvent par (C) ou (C_f)

et on écrit $(C_f) = \{M_{(x, f(x))} \in (P) / x \in D_f\}$

Ou encore $(C_f) = \{M_{(x,y)} \in (P) / x \in D_f \text{ et } y = f(x)\}$

- **Remarque :** $M(x, y) \in (C_f)$ signifie $x \in D_f$ et $y = f(x)$



- **Exemple :** Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+6}$
 et (C_f) sa courbe représentative dans le repère
 - Déterminer le domaine de définition de f
 - Les points suivants appartiennent- ils à (C_f) ? justifier

$$A\left(-1, -\frac{1}{3}\right) \; ; \; B(-2,0) \; ; \; E(1,1) \; ; \; G\left(-3, \frac{5}{3}\right) \; ; \; H\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

- **Cas particulier :** La représentation graphique d'une fonction affine f tel que $f(x) = ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$

2) Egalité de deux fonctions

- **Définition :** On dit que deux fonctions f et g sont **égales** si et seulement si elles ont même ensemble de définition D et pour tout x de D on $f(x) = g(x)$
 et on écrit $f = g$

- **Exemples :** Comparer f et g dans chacun des cas

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = x$ b) $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = |x|$

c) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$; $g(x) = x$ d) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$; $g(x) = \sqrt{x-1}.\sqrt{x+1}$

- **Correction :**

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = x$

$D_f = \mathbb{R}$ car $x^2 \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$ donc $D_f = D_g$

$f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ et $g(x) = x$ $|x|$ n'est égale à x que $x \geq 0$

Or on a $f(-1) = 1$ et $g(-1) = -1$ donc $f \neq g$

b) on a $D_f = D_g$ et on a $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = g(x)$

donc $f(x) = g(x)$ pour tout x de D_f donc $f = g$

c) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0, +\infty[$

$g(x) = x$ $D_f = \mathbb{R}$ puisque $D_f \neq D_g$ alors $f \neq g$

d) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \geq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 1\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |x| \geq 1\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$

$D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

$g(x) = \sqrt{x-1}.\sqrt{x+1}$

$D = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R}\}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \geq 0 \text{ et } x + 1 \geq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \text{ et } x \geq -1\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$

$D_f = [1, +\infty[$

Puisque $D_f \neq D_g$ alors $f \neq g$

• **Correction de l'Exercice :** détermir
chacune des fonctions suivantes e
d'intervalles ou de réunion d'inter

Exercice1 : *déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes en les écrivant sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles .*

$$f(x)=\sqrt{3x^2-5x+2}\ ;\quad g(x)=\frac{x-3}{|x|+1}\ ;\ h(x)=\frac{\sqrt{2x^2-3x}}{x^2-4}\ ;$$

$$l(x)=\sqrt{2|x|-3}\ ;\ u(x)=\sqrt{\frac{2x-3}{x+3}}\quad ;\ v(x)=\frac{\sqrt{3-2|x|}}{x}$$

3) fonctions paires et fonction impaires :

a) Exemples :

*** Exp1** Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2-3$

On a $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=(-x)^2-3=x^2-3=f(x)$

c'est-à-dire $f(-x)=f(x)$

on dit alors f est une fonction paire

*** Exp2** Soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{-3}{x}$

On a $D_g=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq 0\}=\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

- Pour tout x de $\mathbb{R}^*$ on a $-x\in\mathbb{R}^*$
- $g(-x)=\frac{-3}{-x}=-\frac{-3}{x}=-g(x)$

c'est-à-dire $g(-x)=-g(x)$

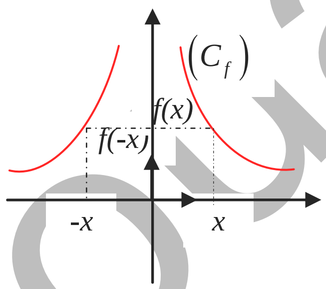
on dit alors g est une fonction impaire

b) Définition:

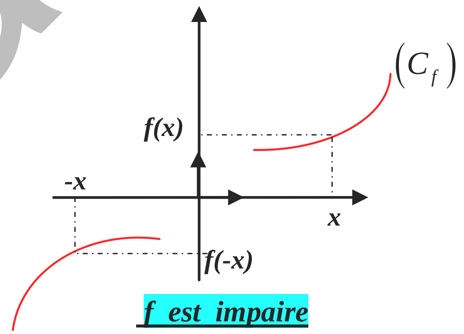
f étant une fonction numérique et D_f son ensemble de définition

*1 Dire que f est une fonction **paire** signifie que
Pour tout x de D_f on a $-x\in D_f$ et $f(-x)=f(x)$

*2 Dire que f est une fonction **impaire** signifie que
Pour tout x de D_f on a $-x\in D_f$ et $f(-x)=-f(x)$



f est paire



f est impaire

c) Remarque :

f étant une fonction numérique et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

*1 f est paire si et seulement si (C_f) est symétrique par rapport à **l'axe des ordonnées**.

*2 f est impaire si et seulement si (C_f) est symétrique par rapport à **l'origine O du repère**.

d) Exercice:

Etudier la parité des fonctions suivantes
(c'est-à-dire si f est paire ou impaire ou ni paire ni impaire)

$$f(x)=2x^2-\sqrt{5}\ ;\ g(x)=2x^3-3x\ ;\ h(x)=3x+2$$

$$u(x)=\frac{3x}{x^2-1}\ ;\quad v(x)=\sqrt{x-3}\ ;\ w(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$t(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+x}\ ;\ l(x)=\frac{2x}{|x-1|-|x+1|}$$