LES SUITES NUMÉRIQUES

I)LA SUITE MAJORÉE, MINORÉE ET BORNÉE

Définitions :

i) On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant M$.

ii) On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est minorée s'il existe un réel m tel que $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \geqslant m$.

iii) On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée s'il existe un réel positif C tel que $(\forall n \geqslant n_0) : |U_n| \leqslant C$. (càd la suite est majorée et minorée à la fois)

Remarques :

- Toute suite positive est minorée par 0.
- Toute suite négative est majorée par 0.

II)LA SUITE MONOTONE

Définitions :

On dit qu'une suite est monotone s'elle est croissante ou décroissante.

Définitions et propriétés:

i. $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante $\Leftrightarrow (\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} \geqslant U_n \Leftrightarrow (\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n \geqslant 0$.

ii. $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement croissante $\Leftrightarrow (\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} > U_n \Leftrightarrow (\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n > 0$.

iii. $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante $\Leftrightarrow (\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} \leqslant U_n \Leftrightarrow (\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.

iv. $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow (\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} < U_n \Leftrightarrow (\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} - U_n < 0$.

v. $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est constante $\Leftrightarrow (\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = U_n$.

Propriétés:

✓ Une suite croissante est minorée par son premier terme.(càd $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \geqslant U_{n_0}$)

✓ Une suite décroissante est majorée par son premier terme.(càd $(\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant U_{n_0}$)

III)LA SUITE ARITHMÉTIQUE - LA SUITE GÉOMÉTRIQUE

	une suite arithmétique	une suite géométrique
définition	$(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = U_n + r$	$(\forall n \geqslant n_0) : U_{n+1} = qU_n$
le terme général U_n	$(\forall n \geqslant n_0) : U_n = U_p + (n-p)r$	$(\forall n \geqslant n_0) : U_n = U_p \times q^{n-p}$
la somme $S_n = U_p + ... + U_n$	$S_n = \left(\frac{n-p+1}{2}\right)(U_p + U_n)$	$S_n = \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right) \times U_p$; $(q \neq 1)$

Exemple :

la somme de GAuss $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

IV)LIMITE D'UNE SUITE

Définition :

1- On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est convergente s'elle admet une limite finie l qd $n \longrightarrow +\infty$ et on écrit: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$

2- On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geqslant n_0}$ est divergente s'elle n'est pas convergente.

Proprieté

$$\text{Soit } r \in \mathbb{Q}^*, \text{ on a : } \quad \lim_{n\to+\infty} n^r = \begin{cases} +\infty & si\ r > 0 \\ 0 & si\ r < 0 \end{cases}$$

V)LES CRITÈRES DE CONVERGENCE :

1- Toute suite croissante et majorée est convergente.

2- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

$$1 \begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : |U_n - l| \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0 \end{cases} \Longrightarrow (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ convergente\ et\ \lim_{n\to+\infty} U_n = l$$

$$2 \begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : W_n \leqslant U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l \end{cases} \Longrightarrow (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ convergente\ et\ \lim_{n\to+\infty} U_n = l$$

$$3 \begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty\ et\ (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ divergente$$

$$4 \begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : W_n \leqslant U_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty\ et\ (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ divergente$$

Ordre et convergence :

$$5 \begin{cases} (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant k) : U_n \geqslant 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \end{cases} \Longrightarrow l \geqslant 0 \qquad 6 \begin{cases} (\forall n \geqslant n_0) : U_n \leqslant V_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l' \end{cases} \Longrightarrow l \leqslant l'$$

VI)SUITES DE TYPE $f(U_n) = U_{n+1}$:

$$\begin{cases} f\ est\ continue\ sur\ un\ intervale\ fermé\ I \\ f(I) \subset I \\ U_{n_0} \in I \\ (U_n)_{n\geqslant n_0}\ est\ convergente \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \end{cases} \Longrightarrow l\ est\ une\ solution\ de\ l'équation\ f(x) = x\ sur\ I$$