LES POLYNÔMES

I. DÉFINITION D'UN POLYNÔME

a. **Définition**: On appelle polynôme de degré n , et on le nomme P(x) une expression littérale en x de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
avec $a_n \neq 0$, a_n , a_{n-1} , …. a_2 , a_1 ,a_0 sont appelés coefficients du polynôme et a_0 est appelé terme constant .

b. **Exemple** : soit $P(x) = -5x^4 + \sqrt{3}x^2 + 4x - 7$

P(x) est un polynôme de degré 4 on écrit d°(P) =4

Les réels –5 ,0 ,$\sqrt{3}$, 4 , –7 sont les coefficients de P(x) car on peut écrire

$P(x) = -5x^4 + 0x^3 + \sqrt{3}x^2 + 4x - 7$

c.Exercice 1

On considère les expressions littérales suivantes $f(x) = x^2 + \frac{2}{x} - 1$,
$g(x) = -x^5 + 3x^3 + x + 6$, $h(x) = \sqrt{13 - x^2} - 2x$

1) Calculer $f(2)$, $g(2)$,$h(2)$
2) Reconnaitre parmi les expressions celles qui représentent un polynôme en précisant son degré et ses coefficients

d.Application2

Ecrire le polynôme p(x) dont le degré est 6 et ses coefficients sont -1,2,0,-3,5

cas particulier :

- un polynôme de 2eme degré s'écrit en général $P(x) = ax^2 + bx + c$; avec $a \neq 0$ On le nomme trinôme du second degré : $P(x) = -3x^2 - 4x + 1$
- un polynôme de 1er degré écrit en général P(x)= $ax + b$; avec $a \neq 0$ on le nomme binôme du premier degré
- ex : $g(x) = -7x + 1$
- $P(x) = 0$ s'appelle polynôme nul

II)EGALITÉ DE DEUX POLYNÔMES

Définition:
Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

Exercice

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes définies par $P(x) = ax^3 + (3b - 2)x^2 + (4 + c)x + d$
avec *a ,b, c et d sont des réels ,* et $Q(x) = -3x^3 + x^2 + 2$

Déterminons a , b , c et d sachant que $P(x) = Q(x)$ *pour tout réel x*

III)OPÉRATIONS SUR LES POLYNÔMES

1. *Somme et produit de deux polynômes*

La somme de deux polynômes P et Q est aussi un polynôme noté P+Q
$d°(P+Q) \leq \sup(d°(P); d°(Q))$
La différence de deux polynômes P et Q est un polynôme noté P-Q
$d°(P-Q) \leq \sup(d°(P); d°(Q))$
Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme noté P×Q
$d°(P \times Q) = d°(P) + d°(Q)$

2.*Application:*

Calculer (P+Q) (x), (P-Q) (x) et (P×Q) (x) avec :

$P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ *et* $Q(x) = 3x^5 - 3x^3 - 6x - 3$

3.*Remarque :*

- *Le polynôme nul est le polynôme dont tous ses coefficients sont nuls.*
- *Le polynôme nul n'admet pas de degré réel.*

IV) RACINE D'UN POLYNÔME-FACTORISATION D'UN POLYNÔME

1.Racine d'un polynôme :

Activité3 : Soit le polynôme $P(x) = x^3 + x - 2$

1) **Calculer $P(1)$**
2) **Déterminer les réels a et b tels que $P(x) = (x-1)(x^2 + ax + b)$**

On a Dans l'activité $P(1) = 0$, On dit que 1 une racine de $P(x)$ ou zéro de $P(x)$

Définition :

On appelle racine d'un Polynômes la valeur a qui annule le Polynômes.
a est une racine de P(x) ssi P(a)=0

Application : Soit $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

a) **Vérifier que 2 et 3 sont deux racines de $P(x)$**

b) **Soit $R(x)$ un polynôme tel que pour tout réel x on a $P(x) = (x-2)(x+3) + R(x)$**

1) **Quel est la nature de $R(x)$**
2) **Déterminer $R(x)$**

2. Factorisation d'un polynôme.

Activité : Soit $\propto$ un réel

1) **Prouver que si un polynôme est factorisablé par $x - \propto$ alors $\propto$ est une racine de ce polynôme**
2) **Soit $\propto$ un réel et P le polynôme défini par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$**
   a. **Factoriser $P(x) - Q(x)$**
   b. **En déduire que si $\propto$ est une racine du polynôme alors il existe un polynôme Q dont on précisera le degré tel que pour tout réel , $P(x) = (x - \propto)Q(x)$.**

Définition: *Le reste de la division d'un polynôme $P(x)$ par **(x – a) est r = P (a)***

Résultat: *Un polynôme $P(x)$ est divisible **(x – a) si et seulement si P (a) = 0***

EXERCICES : Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

1) **Montrons que P(x) est divisible par $x + 3$**
2) **Vérifier que $P(x)$ est divisible par $x + 1$ et $x - 2$**
3) **Vérifier que $P(x) = (x+3)(x+1)(x-2)$**

3. *Division euclidienne*

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-5x-6 & x+3 \\ \underline{-x^3-3x^2} & \overline{x^2-x-2} \\ -x^2-5x-6 & \\ \underline{x^2+3x} & \\ -2x-6 & \\ \underline{2x+6} & \\ 00 & \end{array}$$

On reprend l'exemple (exercice résolu précédent)

On a $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ est divisible par $x + 3$

Cherchons le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x + 3)Q(x)$

Le polynôme $Q(x) = x^2 - x - 2$

D'où $P(x) = (x + 3)(x^2 - x - 2)$

On peut vérifier que $Q(2) = 0$

Donc $Q(x)$ est divisible par $x - 2$

Factorisons $Q(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^2-x-2 & x-2 \\ \underline{-x^2+2x} & \overline{x+1} \\ 0+x+2 & \\ \underline{-x-2} & \\ 00 & \end{array}$$

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

D'où la factorisation de $P(x)$ en produit de binômes $P(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$

il y a une méthode pratique pour faire la division euclidienne par (x-a) c'est l'utilisation du schéma de Horner

<u>*Exemple*</u> $p(x) \equiv 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ *par* $(x - 2)$

$$\begin{array}{r|l} -\ 2x^3+3x^2-4x+2 & x-2 \\ \underline{2x^3-4x^2} & \overline{2x^2+7x+10} \\ -\ 7x^2-4x+2 & \\ \underline{7x^2-14x} & \\ -\ 10x+2 & \\ \underline{10x-20} & \\ 22 & \end{array}$$

Méthode de Horner