FILALI JAOUAD

PRIMITIVES D'UNE FONCTION
2BAC PC

I) GÉNÉRALITÉS

1- Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que F ' = f sur I.

Exemple

Soient f et F les fonctions définies respectivement par $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+\sqrt{x}+4$

F est dérivable sur] 0 ; +∞ [, et $F'(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=f(x)$

Donc F est une primitive de f sur] 0 ; +∞ [

2 -Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I y admet une primitive.

3 -Ensemble des primitives d'une fonctions

Soit F une primitive de f sur I. et G la fonction définie par G(x) = F(x) + k où k est une constante réelle.

La fonction G est dérivable et G'(x)= F'(x)+0 = f(x).

Donc G est aussi une primitive de f sur I .

Réciproquement, soit G et F deux primitives de f sur I.

Posons h (x) = G(x) – F(x) pour tout x appartenant à I

F et G sont dérivables sur I, donc h est dérivable sur I.

h'(x)= G'(x) - F'(x) . pour tout x appartenant à I

Comme F et G sont des primitives de f, G'(x)= f(x) et F '(x)= f(x).

Alors h'(x)= 0 pour tout x appartenant à I. h est donc une fonction constante : il existe un réel k tele que pour tout x de I, h(x)= G(x) - F(x)= k

D'où G(x) = F(x) +k pour tout x appartenant à I.

a) Théorème

Soit F une primitive d'une fonction f sur I.

Alors G est une primitive de f sur I si et seulement s'il existe un réel k tel que G(x) = F(x)+ k

b) Conséquence

Si une fonction admet une primitive sur I, alors elle en admet une infinité.

c) Primitive prenant une valeur donnée en un point x_0

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I, soient G une primitive de f, x_0 un élément de I, et y_0 un nombre réel.

Si F est une primitive de f, alors il existe un réel K tel que F(x)= G(x)+ k.

$F(x_0) = y_0$ si et seulement si $G(x_0) + k = y_0$, et $k = y_0 - G(x_0)$.

Et $F(x)= G(x) + y_0 - G(x_0)$

Ainsi :

Si une fonction f admet une primitive sur I, alors pour tous réel x_0 de I et y_0 de R, il existe une primitive F et une seule de f vérifiant $F(_0) = y_0$

Exemple

Soit f(x) = 3x² +2x + 4

La fonction F définie par F(x)= x^3 +x^2 + 4x -3 est une primitive de f

Les primitives de f sont les fonction G définies par G(x)= x^3 +x^2 + 4x - 3 +k où est une constante réelle.

Déterminons la primitive G de f vérifiant G(1) = -1

G(1) = 3 + k.

La condition G(1) = -1 ,donne k = - 4, ainsi G(x) = x^3 +x^2 + 4x -7.

II) Primitives des fonctions usuelles

La lecture à l'envers du tableau des dérivées des fonctions usuelles nous donne

f	F	Intervalle I (maximal)
$x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$x \mapsto kx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto \frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ (si $n \geq 0$) $\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$ (si $n < 0$)
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \mapsto \tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ ($k \in \mathbb{Z}$)

III) Opérations sur les primitives

Propriétés

- Si F est une primitive de f sur I, et G une primitive de g sur I, alors F+G est une primitive de f+g sur I
- Si F est une primitive de f sur I et k une constante réelle, alors k.F est une primitive de k.f sur I

Formulaire

Pour toute fonction *u* définie et dérivable sur un intervalle I (et, pour la deuxième situation, prenant des valeurs strictement positives sur 1), on a

f	F
$x \mapsto u'(x)u^n(x)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1}$
$x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$

(n différent de -1)

Les résultats suivants découlent des formules de dérivation :

Si u et v sont des fonctions dérivables, de dérivées u' et v ',

$u^n.u'$ n >0	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$ + k
$\frac{u'}{u^2}$	- $\frac{1}{u}$ + k
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	2 $\sqrt{u}$ + k
u' v+v 'u	uv+k
$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$\frac{u}{v}$ +k
u' cos u	Sin u +k
u' sin u	-cos u +k
u'. v'ou	vou + k

En particulier,

- si $f(x)=(ax+b)^n$, alors $F(x)=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$ + k

- si f(x)= cos (ax+b) alors + k $F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)$

- si f(x) = sin (ax+b) alors $F(x)=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ + k

Exemples

- $f(x)=2x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{\sqrt{x}}$ Alors $F(x)=2.\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}-3\sqrt{x}+k$

- $f(x)=\frac{3}{(2x-1)^2}$

Alors $F(x)=-3.\frac{1}{2x-1}$ + k

- $f(x)=\frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2}$

Si on pose u(x) = x² +2x-3, on a u'(x) = 2x+2 = 2(x+1)

Alors $f(x)=\frac{1}{2}\frac{2(x+1)}{(x^2+2x-3)^2}=\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$

Et $F(x)=\frac{-1}{2}\frac{1}{u(x)}+k=\frac{-1}{2}\frac{1}{x^2+2x-3}+k$

- $f(x)=(x+\frac{1}{x})^4(1-\frac{1}{x^2})$

On pose $u(x)=x+\frac{1}{x}$, on a $u'(x)=1-\frac{1}{x^2}$, et $f(x)=u^4u'$ $F(x)=\frac{u^{4+1}}{4+1}+k=\frac{1}{5}(x+\frac{1}{x})^5+k$