FILALI JAOUAD

L'ORDRE DANS IR AU TC

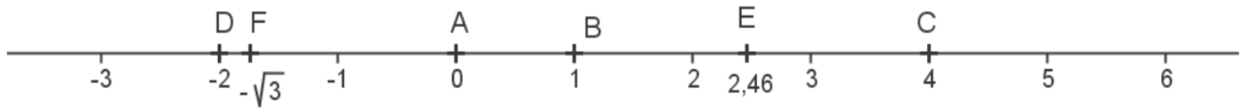
I) Les intervalles de ℝ

1) Définitions

a) Représentation graphique de ℝ

L'ensemble des nombres réels est habituellement représenté sous la forme d'une droite graduée : à chaque point de la droite est associé un unique nombre réel appelé abscisse de ce point

Exemple :



Les abscisses des points A, B , C , D , E et F sont respectivement :
$x_A = 0$; $x_B = 1$; $x_C = 4$; $x_D = -2$; $x_E = 2,46$ et $x_F = -\sqrt{3}$

b) Les intervalles de ℝ

Un intervalle de ℝ est représenté par un segment, une demi-droite ou par la droite toute entière. Chaque intervalle est associé à une inégalité ou un encadrement concernant les abscisses des points de la droite appartenant à ce segment ou cette demi-droite.

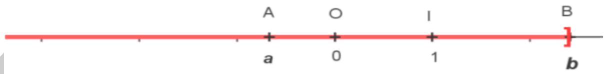
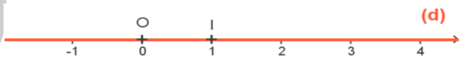
2) Tableau récapitulatif des neufs intervalles de ℝ

Soit A et B deux points de la droite d'abscisses respectives *a* et *b* (*a* < *b*) et soit M un point de la droite d'abscisse *x*

On obtient donc Les neuf types d'intervalles sont dans le tableau ci-dessous: :

Remarques :

- On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités lui appartiennent.
  Par exemple :[6 ; 12] ou [-2 ; + ∞ [sont des intervalles fermés.
- On dit qu'un intervalle est **ouvert** si ses extrémités ne lui appartiennent pas
  Par exemple :] -4 ; 7 [ou] - ∞ ; 3 [sont des intervalles ouverts.
- L'ensemble ℝ **est aussi un intervalle**, il peut se noter] -∞ ; + ∞[
- L'ensemble ne contenant **aucun réel est aussi un intervalle**, c'est **l'intervalle vide, il se note Ø**
- Le symbole **∞** se lit **infini.**

M	Nombres x	Représentation graphique	Notation intervalle
M ∈ [AB]	$a \leq x \leq b$	 **Intervalle fermé borné**	[a ; b]
M ∈]AB [	$a < x < b$	 **Intervalle ouvert borné**	] a ; b [
M ∈ [AB [	$a \leq x < b$	 **Intervalle semi-ouvert à droite, borné**	[a ; b [
M ∈]AB]	$a < x \leq b$	 **Intervalle semi-ouvert à gauche, borné**	] a ; b]
M ∈ [AB)	$x \geq a$	 **Intervalle fermé infini**	[a ; +∞ [
M ∈]AB)	$x > a$	 **Intervalle ouvert infini**	] a ; +∞ [
M ∈ [BA)	$x \leq b$	 **Intervalle fermé infini**	] - ∞ ; b]
M ∈]BA)	$x < b$	 **Intervalle ouvert infini**	] - ∞ ; b [
M ∈ (d)	$x \in R$		] - ∞ ; +∞[

II) Intersections et réunions d’intervalles

1) Intersections

Définition :

Soit E et F deux ensembles quelconques. On appelle intersection de E et F, et on note $E \cap F$, l’ensemble des éléments qui sont communs à E et F.

En d’autres termes, x est un élément de $E \cap F$ si et seulement si x est un élément de E et x est un élément de F.

Remarques : $E \cap F = F \cap E$.

$E \cap \emptyset = \emptyset$.

$E \cap \mathbb{R} = E$.

Si I et J sont des intervalles fermés bornés, alors leur intersection est également un intervalle fermé borné.

Si I et J sont des intervalles ouverts bornés, alors leur intersection est également un intervalle ouvert borné.

2) Réunions

Définition :

Soit E et F deux ensembles quelconques. On appelle réunion de E et F, et on note $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui sont soit dans E, soit dans F.

En d'autres termes, x est un élément de $E \cup F$ si et seulement si x est un élément de E ou x est un élément de F.

Remarques : $E \cup F = F \cup E$.
$E \cup \emptyset = E$.
$E \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$.
Si I et J sont des intervalles fermés bornés, alors leur réunion n'est pas systématiquement un intervalle. Par contre, la réunion de deux intervalles fermés bornés est fermée et bornée.

III. Ordre et comparaison

Comparer deux nombres réels a et b, c'est chercher à savoir quel est le plus grand (ou s'ils sont égaux).

Dire que $a < b$ équivaut à dire que $a - b < 0$.

Ainsi, comparer a et b revient à étudier le signe de $a - b$.

exemples : Soient a et b deux nombres réels, comparer $a^2 + b^2$ et $(a + b)^2$.

a) Ordre et addition

Propriété : Si $a < b$, alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$

Autrement dit, ajouter (ou soustraire) un même nombre à chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.

Propriété : Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.
En effet, si $a < b$, alors $a + c < b + c$.
De plus, si $c < d$, alors $b + c < b + d$. On en déduit $a + c < b + d$.

b) Ordre et multiplication

Propriété : Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$ et $a/c < b/c$
Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$ et $a/c > b/c$

Propriété : Si a, b, c et d sont des réels positifs tels que $a < b$ et $c < d$, alors $ac < bd$.
En effet, si $a < b$, alors $ac < bc$ car $c > 0$.
De plus, si $c < d$, alors $bc < bd$ car $d > 0$. On en déduit : $ac < bd$.

c) Encadrement

Soient a, b et x trois nombres réels. On dit que a et b encadrent x lorsque $a \leq x \leq b$. d'amplitude b-a

Exercice : x est un réel tel que $-2 < x < 3$. On pose $B = -2x - 3$.
Trouver un encadrement de B. et de B^2

III. Inégalités sur les carrés, les racines carrées, les inverses

a) Passage au carré, à la racine carrée

Propriété : a et b étant deux nombres positifs distincts, $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$.

démonstration : On sait que $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Comme a et b sont positifs, $a + b$ est aussi positif et on en déduit que $a - b$ et a^2 et b^2 sont de même signe. D'où

- si $a < b$, alors $a - b < 0$ donc $a^2 - b^2 < 0$ et $a^2 < b^2$.
- si $a^2 < b^2$, alors $a^2 - b^2 < 0$ donc $a - b < 0$ et $a < b$.

Autrement dit, deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

Conséquence : deux nombres positifs et leurs racines carrées sont rangés dans le même ordre.
Donc : $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ équivaut à $a < b$.

b) Passage à l'inverse

Propriété : a et b étant deux nombres strictement positifs, $a < b$ équivaut à $1/b < 1/a$

Démonstration :

Autrement dit, deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse.

Exercice : x est un réel tel que $1 < x < 4$. Donner un encadrement de $A = x + 1/x$

IV. Comparaison de a, a²,a > 0

Propriété : a est un réel strictement positif.

1. Si $a > 1$, alors $a^2 > a$; 2. si $a < 1$, alors $a^2 < a$

Exercice : x est un réel tel que $3 < x < 4$. On pose $A = 4 - x$.

Comparer les nombres A, A^2

IV. Valeur absolue

a) Distance entre deux réels

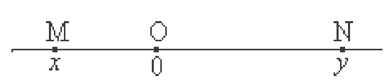
Définition : La distance entre deux réels x et y est la différence entre le plus grand et le plus petit. Cette distance est notée $d(x,y) = |x-y| = |y-x|$.
$|x-y|$ se lit « valeur absolue de x moins y ».

Exemples :
- $|3-5|$ est la distance entre les réels 3 et 5. Cette distance est égale à $5 - 3 = 2$.
- $|-2-3|$ est la distance entre les réels −2 et 3. Cette distance est égale à $3 - (-2) = 5$.

Interprétation graphique de $|x-y|$

Sur une droite graduée d'origine O, notons M le point d'abscisse x et N le point d'abscisse y.

$|x-y|$ est la distance entre les points M et N, c'est à dire MN.



b) Valeur absolue d'un réel

Lorsque $y = 0$, $|x-y| = |x|$. Le nombre réel $|x|$ est alors la distance entre x et 0.

$|x| = x$ lorsque $x \geq 0$

$|x| = -x$ lorsque $x < 0$

$|x| = \sup(x,-x)$

Exemples : $|5| = 5$ car 5 est un nombre positif. $|-3| = 3$ car -3 est un nombre négatif. Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geq 0$.

Propriétés :

1. Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que $x = 0$.
2. $|-x| = |x|$.
3. Dire que $|x| = |y|$ équivaut à dire que $x = y$ ou $x = -y$.

c) L'inégalité $|x - a| \leq r$ (*a* et *r* fixés, *r* > 0)

Propriété : *a* est un réel, *r* est un réel strictement positif.
Dire que $|x - a| \leq r$ équivaut à dire que *x* appartient à l'intervalle [*a* − *r* ; *a* + *r*].

VII). Encadrement d'un nombre.

1-Définition:

Soit x un nombre donné. Réaliser un encadrement de x, c'est trouver deux nombres a et b tels que $a \leq x \leq b$. Le nombre b-a est l'amplitude de cet encadrement.

Exemples:
Donner un encadrement de $\sqrt{3}$ d'amplitude 1, de π d'amplitude 0,1.

2-Encadrement d'une somme, d'un produit.

Règle 1: Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$

Règle 2: Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $0 \leq ac \leq bd$.

VI). Valeur approchée d'un nombre.

Définition 1:

Soit a et x deux nombres et ε un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à ε près (ou à la précision ε) lorsque $|x - a| \leq \varepsilon$

Définition 2:

Soit a et x deux nombres et ε un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à ε près (ou à la précision ε), par défaut, lorsque $a \leq x \leq a + \varepsilon$. a est une valeur approchée de x à ε près, par excès, lorsque a- ε $\leq x \leq a$.