I. Repère du plan :

1. Coordonnées d'un point – Coordonnées d'un vecteur :

Activité : Exercice N°1 de la série.

On considère les points $A(0,2), B(1,-2)\ et\ C(1,1)$ du plan rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Donner les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{BC}$.

2) Ecrire les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{BC}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

3) Donner les coordonnées des vecteurs : $\vec{u}=3\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AB}$.

4) Donner les coordonnées de I le milieu du segment $[AC]$.

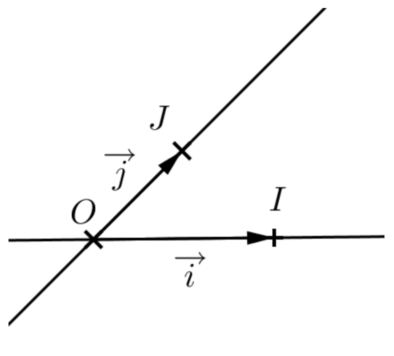
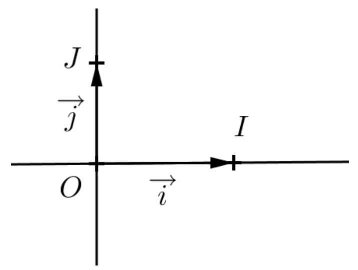
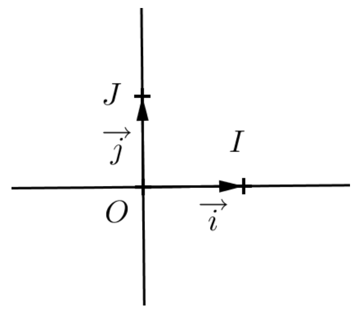
Définitions :

Trois points $O, I\ et\ J$ distincts non alignés définissent un repère $(O;I,J)$.

- Le point O est appelé ***l'origine*** du repère.
- La droite (OI) est appelée ***axe des abscisses***.
- La droite (OJ) est appelée ***axe des ordonnés***.

Si on pose $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- Le couple $(\vec{i},\vec{j})$ est appelé ***une base*** du plan.

		
Repère quelconque	***Repère orthogonal*** $(OI)\perp(OJ)$	***Repère orthonormé*** $\begin{cases}OI=OJ\\(OI)\perp(OJ)\end{cases}$

Propriétés :

Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

- Pour tout point M du plan, il existe un unique couple $(x;y)$ de nombres réels tels que: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Le couple $(x;y)$ est appelé ***coordonnées*** du M et on écrit $M(x;y)$

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple $(x;y)$ de nombres réels tels que: $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Le couple $(x;y)$ est appelé ***coordonnées*** du $\vec{u}$ et on écrit $\vec{u}(x,y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Application:

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

Donner les coordonnés des points $A, B, C, O\ et\ D$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

Propriétés :

Soient A et B deux points de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_B + x_A}{2}, \frac{y_B + y_A}{2}\right)$.
- Si le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est orthonormé, alors: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Application:

Soient $A(4,4)$, $B(2,2)$ et $C(5,-1)$ des points du plan.

Montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

Dans tous ce qui suit on rapporte le plan au repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2. Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs :

Définition :

Soient $\vec{u}(a,b)$ et $\vec{v}(a',b')$ deux vecteurs du plan.

Le nombre $ab'-a'b$ est appelé ***le déterminant*** de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cet ordre, on le note $\det(\vec{u},\vec{v})$ ou $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ et on écrit : $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab'-a'b$.

Exemples:

Calculons : $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} -2\sqrt{6} & 4\sqrt{3} \\ 3 & -3\sqrt{2} \end{vmatrix}$.

Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

Application : Exercice N°2 de la série.

Soit m un paramètre réel.

1) On considère les vecteurs : $\vec{u_1} = -\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{u_2} = -4\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{u_3} = (2m-3)\vec{i} + 2\vec{j}$.

a) Etudier la colinéarité de $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.

b) Déterminer la valeur de m pour que $\vec{u_1}$ et $\vec{u_3}$ soient colinéaires.

2) On considère les points $A(2,3)$, $B(3,5)$ et $C(m-1, 3m-2)$.

Déterminer la valeur de m pour que C appartient à (AB).

II. Equation cartésienne d'une droite :

Activité :

On considère les points $A(1,-3)$, $B(-2,1)$ du plan et soit $M(x,y)$ un point de (AB).

1) Que peut-on dire sur les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$.

2) Sans calcul, déterminer la valeur du $\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AM})$.

3) Calculer $\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AM})$ en fonction de x et y.

L'équation $4x+3y+5=0$ est appelée ***l'équation cartésienne*** de la droite (AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$

Définition :

Dans un repère quelconque du plan, toute droite a une équation ***cartésienne s'écrit*** sous la forme: $ax+by=c$ où a, b et c sont trois réels donnés avec a et b non tous nuls.

Remarque :

Soit (D) du plan d'équation: $ax+by=c$.

Les vecteurs $\vec{u}(-b,a)$ et $\vec{u}'(b,-a)$ sont des vecteurs directeurs de la droite (D).

Application:

Compléter le tableau suivant:

L'équation cartésienne de la droite	*Vecteur directeur de la droite*
$\vec{u}(\cdots;\cdots)$	$2x+5y=4$
$\vec{u}(\cdots;\cdots)$	$y+3x-2=0$
$\vec{u}(3;5)$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=6$
$\vec{u}(\cdots;\cdots)$	$x+4=0$

Remarque :

On note souvent la droite passante par un point A et de vecteur $\vec{u}$ par $D(A,\vec{u})$.

Application:

1) Donner l'équation cartésienne de la droite $(D)=D(A,\vec{u})$ avec $A(1,3)$ et $\vec{u}(2,2)$.
2) Donner l'équation cartésienne de la droite (BC) avec $B(-2,3)$ et $C(0,-4)$.

III. Représentation paramétrique d'une droite:

Activité :

On considère $(D)=D(A,\vec{u})$ tels que $A(2,-1)$ et $\vec{u}(3,1)$ et soit $M(x,y)$ un point de (D).

1) Montrer l'existence d'un nombre réel t tel que: $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{u}$.
2) Ecrire x et y en fonction de t.

Le système $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-1+t \end{cases} / t\in\mathbb{R}$ est appelé ***une représentation paramétrique*** de (D).

Application:

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (MN) avec $M(-1,4)$ et $N(5,4)$.
2) Donner l'équation cartésienne de la droite $(D):\begin{cases} x=5+2t \\ y=4-t \end{cases} / t\in\mathbb{R}$.

Exercice : Exercice N°4 de la série.

IV. Position relative de deux droites:

Activité :

Soient (D) et (Δ) deux droites telles que: $(D):3x-y+4=0$ *et* $(\Delta):-6x+2y-1=0$.

1) Calculer $\det(\vec{u};\vec{v})$ tels que $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D) et $\vec{v}$ un vecteur directeur de (Δ).
2) Déduire la position relative de (D) et (Δ).

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs respectivement des droites (D) et (Δ).

$(D)//(\Delta)$ si et seulement si $\det(\vec{u}\,;\vec{v})=0$.

(D) et (Δ) sécantes si et seulement si $\det(\vec{u}\,;\vec{v})\neq 0$

✍ *Application:*

Etudier la position relative de (D) et (Δ) en déterminant leur point d'intersection si sont sécantes dans les cas suivants:

- Cas ❶: $(D): x+2y=3$ *et* $(\Delta): 2x+y=6$.
- Cas ❷: $(D): x+y=5$ *et* $(\Delta): \begin{cases} x=1+t \\ y=-2+2t \end{cases} / t\in\mathbb{R}$.