TRANSFORMATIONS DU PLAN

On appelle transformation plane (ou transformation du plan) dans lui-même **tout procédé qui, à partir de n'importe quel point M du plan, permet de construire un point M' du plan**.
On dit que M' est l'image de M par cette transformation. M' est unique.
On dit que M est un antécédent du point M' par cette transformation.

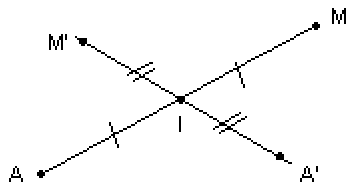
Les isométries du plan sont les transformations qui conservent les distances : une figure et la figure transformée ont les mêmes dimensions.
C'est le cas des translations, des symétries (orthogonale et centrale) et des rotations.

Il existe aussi **des transformations qui ne conservent pas les distances**, comme par exemple **les homothéties**.

• LES TRANSLATIONS.

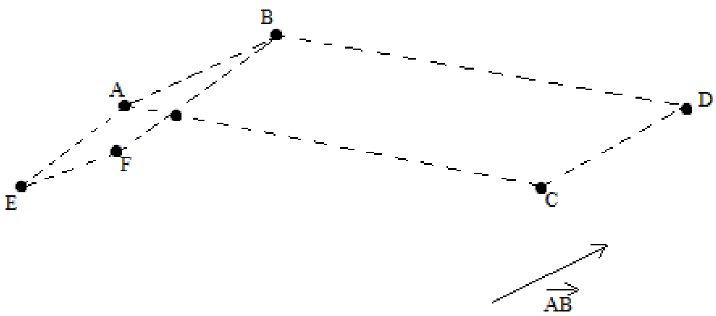
La translation est une transformation plane qui **correspond au déplacement de chacun des points du plan selon un déplacement rectiligne déterminé**. **La translation est une isométrie.**

Étant donné les points (fixes) A et A', la translation t de A en A' associe à tout point M le point M' tel que les segments [AM'] et [A'M] aient le même milieu.



➔ *On peut écrire t(M) = M'. On dit que M' est l'image de M par la translation t.*

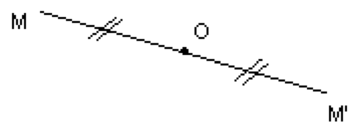
➔ *Lorsque M n'appartient pas à la droite (AA'), M' est l'image de M par la translation t si et seulement si AA'MM' est un parallélogramme.*



- ## LES SYMÉTRIES CENTRALES.

La symétrie centrale est une rotation d'angle 180°.
C'est une isométrie plane qui possède toujours un point invariant.

Étant donné un point (fixe) O, la symétrie S de centre O associe à tout point M le point M' tel que O soit le milieu du segment [MM'].

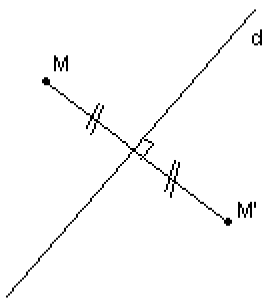


➔ *On peut écrire S(M) = M'. On dit que M' est l'image de M par la symétrie S de centre O, ou que M' est le symétrique de M par rapport à O.*
O est son propre symétrique : c'est le seul point invariant.

- ## LES SYMÉTRIES AXIALES OU ORTHOGONALES PAR RAPPORT À UN AXE.

La symétrie axiale est une isométrie plane définie par un axe *(d)* telle que :
M' est l'image de M par la symétrie axiale orthogonale d'axe *(d)* si et seulement si *(d)* est la médiatrice de [MM'].

S*(d)* est appelée symétrie d'axe *d* ou symétrie orthogonale par rapport à *d*.



Les points situés sur l'axe *(d)* sont les seuls points invariants par la symétrie axiale S d'axe (d).

NB : On dit qu'une figure possède un axe de symétrie si elle est globalement invariante par la symétrie orthogonale par rapport à un axe.

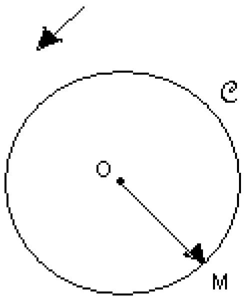
- ## ROTATIONS.

Une rotation transforme une figure en une figure superposable.
Cela signifie que la rotation conserve l'alignement des points, les longueurs, les angles et les aires.

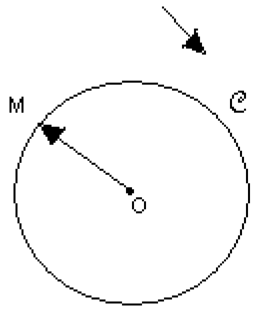
Elle possède toujours un point invariant.

- Orientation du plan.

Soit O un point et C un cercle de centre O.
On considère un point M variable se déplaçant sur C sans changer de sens.
On dit que M effectue une rotation autour de O sur C.
Il y a deux manières de déplacer M et donc, **deux sens de rotation**.



déplacement "sens direct" ou trigonométrique



déplacement "sens indirect" ou rétrograde

NB : si rien n'est précisé la rotation s'effectue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (= sens positif de rotation).

- ## LES ISOMÉTRIES.

Une isométrie est une **transformation qui conserve les longueurs, les distances, les largeurs**.
C'est donc un cas particulier de similitude.

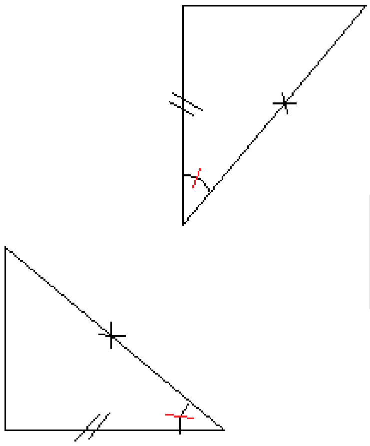
L'image d'une droite, les images de deux droites sécantes en un point, l'image d'un cercle, l'image d'un triangle par une symétrie centrale, une symétrie axiale, une translation et une rotation sont des isométries.
Elles conservent des propriétés communes telles que : la conservation de l'alignement, des angles, des aires, des milieux, du parallélisme et de l'orthogonalité.

Ex :

- *L'image d'un rectangle par une translation est un rectangle puisque deux segments perpendiculaires sont transformés en deux segments perpendiculaires. De plus, les deux rectangles ont même longueur et même largeur. On dit qu'ils sont isométriques.*

- *L'image d'un losange par une symétrie centrale est un losange puisque les symétries centrales conservent les distances.*

Attention ➔ *les homothéties ne sont pas des isométries, sauf lorsque k = 1 (cas de l'identité) ou lorsque k = - 1 (cas d'une symétrie centrale).*



Deux figures isométriques sont superposables, éventuellement après retournement (rotation).

- ***Deux triangles sont isométriques si et seulement si leurs trois côtés sont de même longueur deux à deux.***

- ***Pour que deux triangles soient isométriques il suffit qu'ils aient deux côtés de même longueur deux à deux et l'angle défini par ces deux côté de même mesure.***

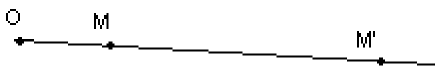
- ***Pour que deux triangles soient isométriques, il suffit qu'ils aient un côté de même longueur et les deux angles ayant pour sommet les extrémités de ce côté de même mesure deux à deux.***

- LES HOMOTHÉTIES.

Une homothétie est une **transformation géométrique d'un espace affine dans lui-même, fixant un point O appelé centre de l'homothétie**.

*Étant donné un point O et un réel strictement positif k, l'homothétie h de centre O et de rapport k associe à tout point M le point M' tel que **OM' = k x OM** et tel que si M ≠ O, M' appartient à la demi-droite [OM). On dit que M' est l'image de M par l'homothétie h de centre O et de rapport k ou que M' est l'homothétique de M par h.*

Ex : si k = 4 on a OM'= 4 x OM ➔ $\overrightarrow{OM'} = k \times \overrightarrow{OM}$.



- Image d'une droite ou d'un cercle par une homothétie.

- L'image d'une droite par homothétie *h* est une droite qui lui est parallèle.
- Les images de deux droites sécantes en I et de rayon R par l'homothétie *h* sont deux droites sécantes en I' = *h*(I).
- L'image du cercle de centre I et de rayon R par l'homothétie *h* est le cercle de centre I' = *h*(I) et de rayon R' = k x R.

Propriétés.

Étant donné un point O et un nombre réel strictement positif k différent de 1, O est le seul point invariant (par l'homothétie de centre de et de rapport k).
Les homothéties de rapport $k > 0$ multiplient les distances par k.

- ⇨ **Si $k > 1$**, l'effet d'une homothétie de rapport k sur une distance est celui d'un **agrandissement**.
- ⇨ **Si $0 < k < 1$**, l'effet d'une homothétie sur une distance est celui d'une **réduction**.
- ⇨ Les homothéties de rapport $k \neq 1$ ne sont pas des isométries.

Conséquences pour des figures usuelles.

- **Exemple 1** : l'image d'un rectangle par une homothétie est un rectangle puisque deux segments perpendiculaires sont transformés en deux segments perpendiculaires.
- **Exemple 2** : l'image d'un losange par une homothétie est un losange parce que c'est un quadrilatère dont les quatre côtés ont même longueur. Toutes les distances sont donc multipliées par le même nombre.

- **Pour prouver qu'un point M' est l'image du point M par une symétrie centrale de centre O.**

    - Prouver que O est le milieu du segment [MM'] (le point O est sa propre image).

- **Pour prouver qu'un point est l'image d'un autre par une symétrie axiale.**

    - Prouver que la droite D est la médiatrice du segment [MM'] (tous les points appartenant à la droite D sont leur propre image).

- **Pour prouver qu'un point M' est l'image de M par une rotation de centre O et d'angle α.**

    - Prouver que $M\hat{O}M' = \alpha$.
    - Prouver que OM = OM' (le point O est la propre image).

- **Pour prouver que le point M' est l'image de M par la translation selon de segment [AB].**

    - Prouver que les droites MM' et AB sont parallèles, que MM' = AB et que la flèche MM' est orientée dans le même sens que la flèche AB.

  ou

    - Prouver que ABM'M est un parallélogramme.