2BAC PC+SVT

# Les probabilités

## I- Principe général du dénombrement :

### 1- Introduction :

Considérons les chiffres : 3 et 4 et 5. On cherche le nombre des nombres qu'on peut composer de deux chiffres distincts parmi ces chiffres.

❖ 1ère méthode : (spontanée)

On trouve les nombres suivants : 43 – 53 – 34 – 54 – 35 – 45 donc : 6 nombres

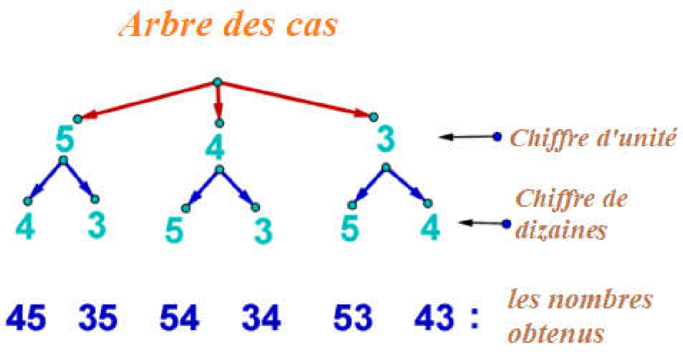
❖ 2ème méthode :

On a tout nombre est de la forme ***ab*** avec ***a*** le chiffre d'unité et ***b*** le chiffre de dizaine.

- Le premier choix : pour choisir le nombre d'unité ***a*** on trouve 3 possibilités (manières)
- Le deuxième choix : pour choisir le nombre de dizaines ***b***, il reste 2 possibilités

Le nombre des possibilités est donc : $3 \times 2 = 6$

On peut représenter ses possibilités sous la forme d'un arbre des cas.




### 2- Le principe :

Considérons une expérience contenante $p$ choix : $C_1, C_2, C_3, \dots, C_p$

- Le choix $C_1$ se fait par $n_1$ manières différentes
- Le choix $C_2$ se fait par $n_2$ manières différentes

.

.

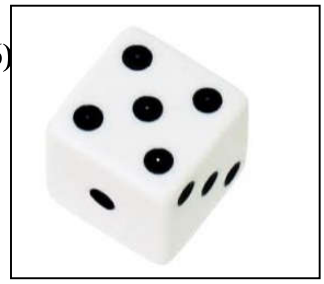
.

- Le choix $C_p$ se fait par $n_p$ manières différentes

Alors le nombre des manières dans cet expérience est : $\boldsymbol{n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_p}$

**Exemple :**

**1) On lance un dé (qui a 6 faces contenant les chiffres : 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6) deux fois successivement.**



Tout résultat obtenu est appelé **une possibilité**

❖ **Déterminer le nombre de possibilités obtenues :**
- La première lance : on a 6 possibilités
- La deuxième lance : on a 6 possibilités

Alors le nombre des possibilités est : $6 \times 6 = 36$

❖ **Combien de résultat possible si on veut obtenir un nombre pair dans le premier jet.**
- La première lance : on a 3 possibilités (les nombres pairs seulement :2 ;4 ;6)
- La deuxième lance : on a 6 possibilités

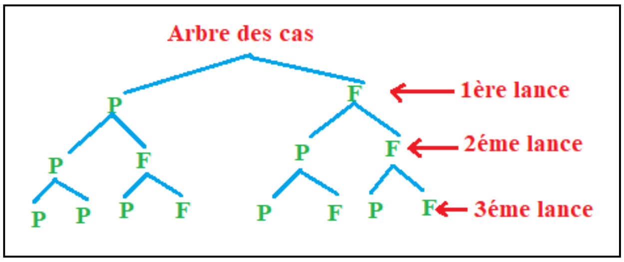
Alors le nombre des possibilités est : $3 \times 6 = 18$

**2) On lance une pièce d'argent ( qui a deux faces : PILLE (P) et FACE (F)) 3 fois successivement.**

**Déterminer le nombre de possibilités obtenues.**

- La première lance : on a 2 possibilités
- La deuxième lance : on a 2 possibilités
- La troisième lance : on a 2 possibilités

Alors le nombre des possibilités est : $2 \times 2 \times 2 = 8$




## II- Les arrangements :

### 1- Introduction :

Considérons l'ensemble : $E = \{a, b, c, d, e\}$.

❖ **Combien de triplet ( ; ; ) qu'on peut composer en utilisant les éléments de $E$ ?**
- Le choix de l'abscisse : 5 possibilités
- Le choix de l'ordonné : 5 possibilités
- Le choix de la cote : 5 possibilités

Alors le nombre des triplets est : $5^3$

Chaque triplet s'appelle <u>un arrangement avec répétition</u> de 3 éléments parmi 5 éléments.

❖ **Combien de triplet ( ; ; ) qu'on peut composer en utilisant les éléments de $E$ sachant que les éléments du triplet sont deux à deux distinct ?**
- Le choix de l'abscisse : 5 possibilités
- Le choix de l'ordonné : 4 possibilités
- Le choix de la cote : 3 possibilités

Alors le nombre des triplets est : $5 \times 4 \times 3$

Dans ce cas chaque triplet s'appelle <u>un arrangement sans répétition</u> de 3 éléments parmi 5 éléments.

### 2- Définition et propriété :

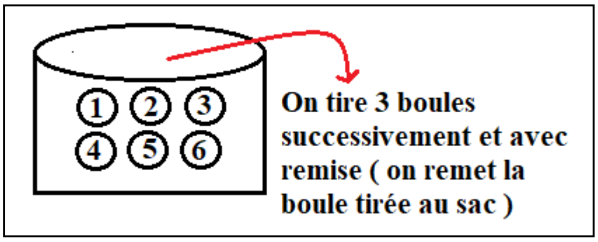
❖ Soient $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ contenant $n$ élément et $p$ un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$.
Tout élément de la forme $\underbrace{(a_i, a_j, a_k, \ldots, a_p)}_{p \text{ élément}}$ est appelé **un arrangement avec répétition** de $p$ éléments parmi $n$ éléments et le nombre d'arrangement est $\boldsymbol{n^p}$.

❖ Tout élément de la forme $\underbrace{(a_i, a_j, a_k, \ldots, a_p)}_{p \text{ élément}}$ sachant que ses éléments sont deux à deux distinct est appelé **un arrangement sans répétition** de $p$ éléments parmi $n$ éléments et le nombre d'arrangement est l'entier naturel noté par $A_n^p$ tel que : $A_n^p = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}_{p \text{ facteur}}$

**<u>Exemples :</u>**

1) $A_3^2 = 3 \times 2 = 6$
2) $A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

3) **Un sac contient six boules portant les nombres : 1 ;2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. On tire au hasard 3 boules successivement et avec remise. Combien de tirages sont possibles ?**




Puisque le tirage se fait successivement et avec remise,

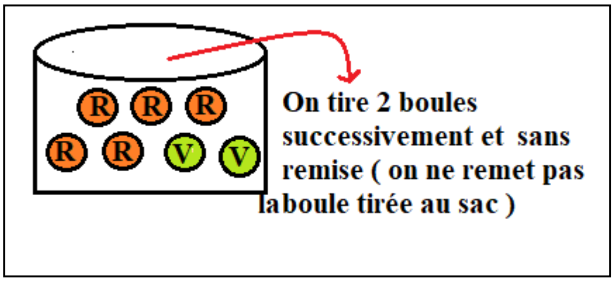
alors chaque possibilité est un arrangement avec répétition

de 3 éléments parmi 6 éléments.

Alors le nombre de tirages possible est : $6^3 = 216$

4) **Un sac contient 5 boules rouge et 2 boules vert. On tire au hasard 2 boules successivement et sans remise.**

- **Combien de tirages sont possibles ?**




Puisque le tirage se fait successivement et sans remise,

alors chaque possibilité est un arrangement sans répétition

de 2 éléments parmi 6 éléments.

Alors le nombre de tirages possible est : $A_7^2 = 7 \times 6 = 42$

- **Combien de tirages sont possibles sachant que les deux boules tirées soient rouges ?**

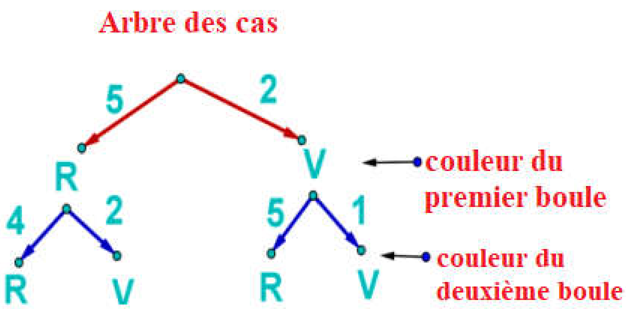
Puisque le tirage se fait successivement et sans remise, alors chaque possibilité est un arrangement sans répétition de 2 éléments parmi 5 éléments (5 boules rouge)

Alors le nombre de tirages possible est : $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$

- **Combien de tirages sont possibles sachant que la première boule soit rouge et la deuxième soit verte ?**

Le nombre de tirages possible est : $A_5^1 \times A_2^1 = 5 \times 2 = 10$

**Remarque :** on peut utiliser l'arbre des cas




## Remarques :

5) Si le tirage de $p$ éléments parmi $n$ éléments se fait successivement et avec remise, alors le nombre de tirages sont possibles est $\boldsymbol{n^p}$.
6) Si le tirage de $p$ éléments parmi $n$ éléments se fait successivement et sans remise, alors le nombre de tirages sont possibles est $\boldsymbol{A_n^p}$ (avec $1 \leq p \leq n$)
7) $A_n^1 = n$ et $A_n^0 = 1$

## III- Les permutations :

### 1- Introduction :

Cinq personnes veulent s'asseoir sur des chaises numérotées de 1 à 5 afin que chaque chaise ne puisse accueillir qu'une seule personne. Combien de possibilités ?

Chaque possibilité est un arrangement sans répétition de 5 éléments parmi 5 éléments.

Le nombre des possibilités est : $A_5^5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

On appelle chaque arrangement sans répétition de 5 éléments parmi 5 éléments une permutation de 5 éléments.

### 2- Définition :

Soit $n \in \mathbb{N}$
Tout arrangement sans répétition de $\boldsymbol{n}$ éléments parmi $\boldsymbol{n}$ éléments **une permutation** de $\boldsymbol{n}$ éléments et le nombre de ces permutations est : $\boldsymbol{A_n^n = n(n-1)(n-2) \dots . \times 2 \times 1}$.
Le nombre $\boldsymbol{A_n^n}$ est noté par : $\boldsymbol{n}!$ et se lit **'n factoriel'**

**Exemples :**

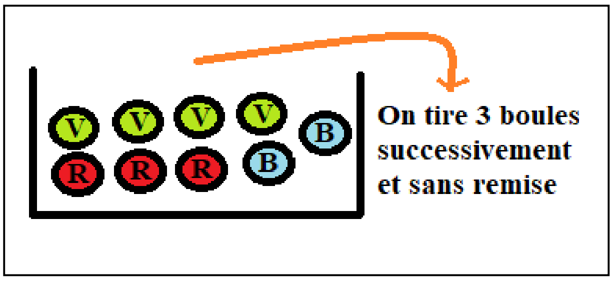
a) **Une course d'ennemi rural a lieu entre 4 coureurs A, B, C et D sachant que chaque coureur occupe un seul rang. Combien de résultat possible ?**

Chaque résultat est une permutation de 4 éléments.

Donc le nombre des résultats possibles est : $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

b) **Un sac contient 3 boules rouge et 4 boules vert et 2 boules bleu. On tire au hasard 3 boules successivement et sans remise.**

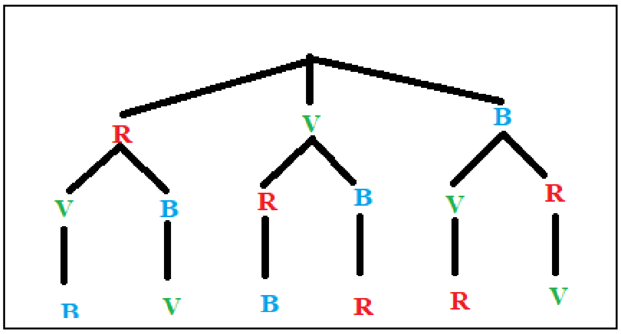
- **Combien de tirages possibles ?**




Puisque le tirage se fait successivement et sans remise, alors chaque possibilité est un arrangement sans répétition de 3 éléments parmi 9 éléments.

Alors le nombre de tirages possible est : $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$

- **Combien de tirages possibles si les 3 boules ont des couleurs différents deux à deux ?**




Le nombre de tirages possible est :

$A_4^1 \times A_3^1 \times A_2^1 \times 3! = 4 \times 3 \times 2 \times 6 = 144$

(3! s'appelle le coefficient de permutation, car l'ordre des Couleurs est important et on une permutation de 3 boules)

**Remarques :**

- $1! = 1$ et $2! = 2 \times 1 = 2$
- On admet que : $0! = 1$
- $(n+1)! = (n+1) \times n!$ ou $(n+1)! = (n+1) \times n \times (n-1)!$
- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

## IV-Les combinaisons :

### 1- Introduction :

Considérons l'ensemble : $E = \{a, b, c, d\}$. On cherche le nombre des parties de E comportant 2 éléments.

Les parties sont : $\{a, b\}$ ; $\{a, c\}$ ; $\{a, d\}$ ; $\{b, c\}$ ; $\{b, d\}$ ; $\{c, d\}$ donc : 6 parties.

Chaque partie s'appelle une combinaison de 2 éléments parmi 4 éléments.

Puisque $\{a,b\} = \{b,a\}$ alors l'ordre n'est pas important pour les combinaisons.

## 2- Définition :

Soient $E = \{a_1, a_2, .., a_n\}$ contenant $n$ élément et $p$ un entier naturel tel que $p \leq n$
Toute partie de E comportant $p$ élément s'appelle une combinaison de $p$ élément parmi $n$ élément.
Le nombre de ces combinaisons est : $C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$

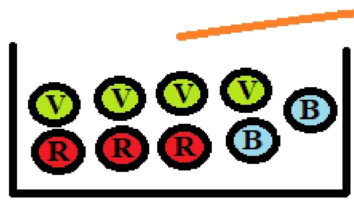
## 3- Propriétés :

- $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$
- $C_n^0 = 1$
- $C_n^n = 1$
- $C_n^1 = n$
- $C_n^{n-1} = n$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$

**Exemples :**

**Un sac contient 3 boules rouge et 4 boules vert et 2 boules bleu. On tire simultanément 3 boules.**

- **Combien de tirages possibles ?**




Puisque le tirage se fait simultanément, donc chaque

Possibilité est une combinaison de 3 éléments parmi 9

éléments, alors le nombre de tirages possibles est :

$C_9^3 = \frac{9!}{3! \times (9-3)!} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6 \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{6} = 84$

- **Combien de tirages possibles sachant que les 3 boules soient vertes ?**

Le nombre de tirages possibles est : $C_4^3 = \frac{4!}{3! \times (4-3)!} = \frac{4!}{3! \times 1!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$

(combinaison de 3 éléments parmi 4 éléments (les boules vert seulement))

- **Combien de tirages possibles si les 3 boules ont des couleurs différents deux à deux ?**

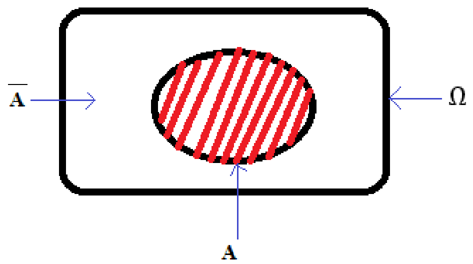
Le nombre de tirages possibles est : $C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 4 \times 3 \times 2 = 24$

(l'ordre n'est pas important)

## V- Les probabilités :

### 1- Vocabulaires :

- Lors du lancer d'un dé ou une pièce de monnaie (par exemple), on connaît tous les résultats possibles, sans savoir, avant l'expérience, le résultat que l'on va obtenir. Le résultat obtenu est dû ***au hasard***.
- On dit que c'est ***une expérience aléatoire.***
- Chaque résultat est appelé ***issue ou éventualité ou possibilité.***
- ***Un événement*** est constitué d'une ou plusieurs issues.
- L'ensemble de tous les éventualités est dite ***l'univers des éventualités*** et il est noté **Ω**.
- Donc on peut définir un événement d'une autre façon ***: un événement est une partie de Ω***.
- Si on effectue une expérience et $A$ un événement de cette expérience alors :
  - → Si on a obtenu un élément de $A$ on dit que l'événement $A$ est réalisé
  - → Si on a obtenu un élément qui n'est pas de $A$ on dit que l'événement $A$ n'est pas réalisé
- On remarque que $\Omega \subset \Omega$ donc $\Omega$ est un événement et puisqu'après avoir effectué l'expérience on obtient toujours un élément de $\Omega$. Alors $\Omega$ est toujours réalisable on dit que ***Ω est un événement certain.***
- On remarque que $\emptyset \subset \Omega$ donc $\emptyset$ est un événement et puisqu'après avoir effectué l'expérience on ne peut pas obtenir un élément de $\emptyset$ (car elle est vide). Alors $\emptyset$ est irréalisable on dit que ***∅ est un événement impossible.***
- Le nombre des éléments de $\Omega$ est noté $\boldsymbol{card(\Omega)}$ (le nombre des cas possibles) et Le nombre des éléments de $A$ est noté $\boldsymbol{card(A)}$ (le nombres des cas favorables)
- L'événement qui ne contient qu'un seul élément est appelé ***événement élémentaire.***
- Deux événement A et $B$ sont dite ***incompatibles*** s'ils ne peuvent pas se réaliser au même temps donc : $A \cap B = \emptyset$
- Deux événements A et $B$ sont ***indépendantes*** si l'un se réalise indépendamment de l'autre.
- Soit A un événement
  La partie de constitué des éléments de $\Omega$ qui n'appartient pas à A est appelé ***l'événement contraire de A ou la partie complémentaire de A*** et on le note : $\bar{A} = C_{\Omega}^{A} = \{x \in \Omega / x \notin A\}$
  $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$




### 2- La probabilité d'un événement :

**Définition :**

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une fréquence théorique appelé probabilité.
La probabilité de réalisation d'un événement A se note $p(\mathrm{A})$ et on a : $p(\mathrm{A}) = \frac{n}{N}$ avec $n$ l'effectif donné et $N$ l'effectif total.
On remarque que : $0 \leq p(\mathrm{A}) \leq 1$

**Propriété :**

Soit A un événement et $p$ une probabilité sur $\Omega$.
La probabilité de réalisation d'événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires constituant A.

**Exemple :**

On lance un dé (qui a 6 faces contenant les chiffres : 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6) une fois.

On a : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et les événements élémentaires sont : $\{1\}$ ; $\{2\}$ ; $\{3\}$ ; $\{4\}$ ; $\{5\}$ ; $\{6\}$

Si on a : $p(\{1\}) = 0.1$ ; $p(\{2\}) = 0.2$ ; $p(\{3\}) = 0.1$ ; $p(\{4\}) = 0.2$ ; $p(\{5\}) = 0.1$ ; $p(\{6\}) = 0.3$

Soit l'événement A"obtenir un nombre pair"

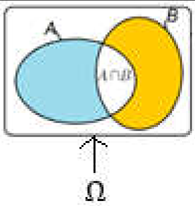
Donc $A = \{2; 4; 6\}$

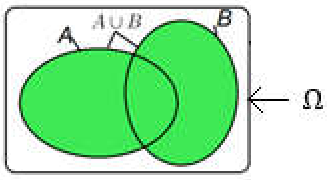
$p(\mathrm{A}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = 0.2 + 0.2 + 0.3 = 0.7$

**Propriété :**

Soit $p$ une probabilité sur $\Omega$.

- $0 \leq p(\mathrm{A}) \leq 1$ $(\forall A \subset \Omega)$
- $p(\emptyset) = 0$ et $p(\Omega) = 1$
- $(\forall A, B \subset \Omega)$: $A \subset B \Longrightarrow p(A) \leq p(B)$
- Soient A et $B$ deux événements incompatibles $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset)$ alors : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Soient A et $B$ deux événements, en général : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
- $p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(A)$




## 3- Théorème d'équiprobabilités

**Définition :**

La condition d'équiprobabilités signifie que tous les événements élémentaires ont la même probabilité de réalisation.

**Conséquences :**

1) Soit : $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ donc : $card(\Omega) = n$
   $p(\Omega) = p(\{x_1\}) + p(\{x_2\}) + p(\{x_3\}) + \cdots + p(\{x_n\})$
   Si la condition d'équiprobabilités est vérifiée alors : $p(\Omega) = \mathrm{n} \times p(\{x_1\})$
   On sait que : $p(\Omega) = 1$
   Par suite : $\boldsymbol{p(\{x_1\}) = p(\{x_2\}) = p(\{x_3\}) = \cdots = p(\{x_n\}) = \frac{1}{p(\Omega)} = \frac{1}{n}}$

2) Soit : $\mathrm{A} = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_m\}$ un événement donc : $card(\mathrm{A}) = m$
   $p(\mathrm{A}) = p(\{x_1\}) + p(\{x_2\}) + p(\{x_3\}) + \cdots + p(\{x_m\})$
   Si la condition d'équiprobabilités est vérifiée alors : $p(\mathrm{A}) = \mathrm{m} \times p(\{x_1\})$
   On sait que : $p(\{x_1\}) = \frac{1}{n}$
   Par suite : $p(\mathrm{A}) = \mathrm{m} \times \frac{1}{n} = \frac{m}{n} \Longrightarrow \boldsymbol{p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}}$

**Remarques :**

1) Comment savoir que la condition d'équiprobabilités est vérifiée dans un exercice ?

→ Un dé non truqué (non falsifiée)

→ Pièce de monnaie non truqué (non falsifiée)

→ Un sac contient des boules qu'on ne peut pas les distinguer à la touche

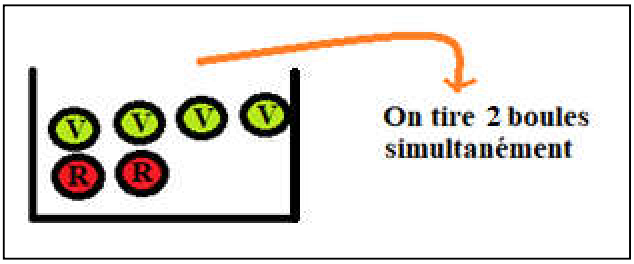
2) Si la condition d'équiprobabilités est réalisée et A un événement donc :
   $\boldsymbol{p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{nombres\ des\ cas\ favorables}{nombres\ des\ cas\ possibles}}$

3) Si la condition d'équiprobabilités n'est pas réalisée on utilise cette règle << La probabilité de réalisation d'événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires constituant A.>>

**Application :**

Un sac contient 4 boules vert et 2 boules rouge. On tire simultanément 2 boules.

(on ne peut pas distinguer boules à la touche)




Considérons les événements suivants :

A ‘‘tirer deux boules rouge’’

B ‘‘tirer deux boules vert’’

C ‘‘tirer deux boules de même couleur’’

D ‘‘tirer deux boules avec couleur différent’’

Calculer les probabilités de ces événements :

Puisque on ne peut pas distinguer boules à la touche alors la condition d’équiprobabilités est réalisée et puisque le tirage se fait simultanément donc : $card(\Omega) = C_6^2 = \frac{6!}{2!\times(6-2)!} = \frac{6!}{2!\times 4!} = \frac{6\times5\times4!}{2!\times4!} = 15$

$card(\text{A}) = C_2^2 = 1 \Longrightarrow p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{1}{15}$

$card(\text{B}) = C_4^2 = \frac{4!}{2!\times(4-2)!}\frac{4\times3\times2\times1}{2\times2} = 6 \Longrightarrow p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$C = A \cup B$ (tirer deux boules vert ou deux boules rouge)

$\Longrightarrow p(C) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{15} + \frac{6}{15} = \frac{7}{15}$

$card(\text{D}) = C_4^1 \times C_2^1 = 4 \times 2 = 8$ (tirer une boule rouge et une boule vert ou inversement et l’ordre n’est pas important)

$\Longrightarrow p(D) = \frac{card(D)}{card(\Omega)} = \frac{8}{15}$

- Une autre méthode pour $p(D)$
  $D = \bar{C}$ ( D est l’événement contraire de C)
  $\Longrightarrow p(D) = p(\bar{C}) = 1 - p(c) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{15-7}{15} = \frac{8}{15}$

## 4- Probabilité conditionnelle :

### Introduction :

On lance un dé non truqué (qui a 6 faces contenant les chiffres : 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6) une fois.

Considérons les deux événements A et B : $A$: "Obtenir un nombre pair" et $B$: "Obtenir le nombre 2"

Donc : $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{2\}$

On a : $\text{A} \cap \text{B} = \{2\}$ donc : $p(\text{A} \cap \text{B}) = \frac{card(\text{A}\cap\text{B})}{card(\Omega)} = \frac{1}{6}$

$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

La probabilité de réalisation de B sachant que A est réalisé est noté par : $P_A(B) = \frac{1}{3}$

On remarque que : $p(A) \times P_A(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = p(\text{A} \cap \text{B})$

Donc : $P_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}$

**Définition :**

Soient A et $B$ deux événements tel que : $p(A) \neq 0$

La probabilité de réalisation de B sachant que A est réalisé est noté par : $\boldsymbol{P_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}}$

**Propriété :**

Soit $p$ une probabilité sur $\Omega$.

- $(\forall\, A \subset \Omega)/p(A) \neq 0 : P_A(A) = 1$
- $(\forall\, A, B \subset \Omega) : p(A \cap B) = p(A) \times P_A(B)$ et $p(A \cap B) = p(B) \times P_B(A)$
- Soient A et $B$ deux événements incompatibles $(A \cap B = \emptyset)$ alors : $P_A(B) = 0$ et $P_B(A) = 0$

**Application :**

Les élèves d'une classe sont répartis comme suit :

| | Garçons | Filles | Total |
|---|---|---|---|
| Nouveaux | 11 | 8 | 19 |
| Redoublants | 3 | 2 | 5 |
| Total | 14 | 10 | 24 |

Nous choisissons un élève au hasard de cette classe :

- Quelle est la probabilité de choisir un élève parmi les garçons ?

$card(\Omega) = C_{24}^{1} = 24$

Soit : $A$: "l'élève choisi est un garçon" donc $card(A) = C_{14}^{1} = 14$

Alors : $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$

- Quelle est la probabilité de choisir un élève parmi les nouveaux ?

Soit : $B$: "l'élève choisi est nouveau" donc $card(B) = C_{19}^{1} = 19$

Alors : $p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{19}{24} = \frac{7}{12}$

- Sachant que ‘’ l'élève est un garçon ‘’ quelle est la probabilité pour qu'il soit ‘’nouveau’’ ?

On calcul $P_A(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A)}$ ?

Avec $A \cap B$: " l'élève choisi est un nouveau garçon" donc : $card(A \cap B) = C_{11}^{1} = 11$

Donc : $p(A \cap B) = \frac{card(A\cap B)}{card(\Omega)} = \frac{11}{24}$

Alors : $P_A(B) = \frac{\frac{11}{24}}{\frac{7}{12}} = \frac{11}{24} \times \frac{12}{7} = \frac{11}{14}$

## 5- Les probabilités totales :

**Définition : (partition d'un ensemble)**

Soient $A_1$ ; $A_2$ ; $A_3$ ; … ; $A_n$ une famille de parties non vides d'un ensemble $\Omega$ tels que :

- ✓ Ces parties sont disjoints deux à deux : $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(\forall i, j = 1, \dots, n)$
- ✓ $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

On dit que la famille $A_1$ ; $A_2$ ; $A_3$ ; … ; $A_n$ forme une partition de $\Omega$

**Propriété : (probabilités totales)**

Soient $(\Omega\,,p)$ un espace probabilisé et la famille $A_1$ ; $A_2$ ; $A_3$ ; … ; $A_n$ une partition de $\Omega$ et B un événement inclus dans $\Omega$. Alors :

$$\boldsymbol{p(B) = p(A_1)P_{A_1}(B) + p(A_2)P_{A_2}(B) + \cdots + p(A_n)P_{A_n}(B)}$$

**Cas particulier :**

$\boldsymbol{p(B) = p(A)P_A(B) + p(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)}$ car $A$ et $\overline{A}$ forme une partition de $\Omega$ ( $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$)

**Application :**

Dans un match de football : la probabilité que le gardien arrête le premier penalty est $\frac{4}{7}$ , si le gardien arrête le premier penalty, la probabilité qu'il arrête la seconde est $\frac{5}{7}$.

S'il n'arrête pas le premier penalty, la probabilité qu'il arrête la seconde est $\frac{1}{7}$.

Soit : $A$: "le nombre gardien arrête le premier penalty" et $B$: "le nombre gardien arrête le deuxième penalty"

- Calculer : $p(A)$ et $p(\bar{A})$ et $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$ et $p(B)$ et $p(A \cap B)$ et $P_B(A)$

$p(A) = \frac{4}{7}$ (la probabilité que le gardien arrête le premier penalty)

$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$ (la probabilité que le gardien n'arrête pas le premier penalty)

$P_A(B) = \frac{5}{7}$ (la probabilité qu'il arrête la seconde sachant qu'il arrête le premier)

$P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{7}$ (la probabilité qu'il arrête la seconde sachant qu'il n'arrête pas le premier)

$p(B) = p(A)P_A(B) + p(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) = \frac{4}{7} \times \frac{5}{7} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{23}{49}$ (la probabilité qu'il arrête la seconde penalty)

$p(A \cap B) = p(A) \times P_A(B) = \frac{4}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{49}$ (la probabilité qu'il arrête le premier et la seconde penalty)

$P_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{20}{49}}{\frac{23}{49}} = \frac{20}{23}$ (la probabilité qu'il arrête le premier sachant qu'il va arrêter la deuxième)

## 6- Indépendance :

### a) Indépendance de deux événements :

**Définition :**

Soient A et $B$ deux événements.
On dit que A et B sont indépendants si $\boldsymbol{P_B(A) = P(A)}$ ou bien $\boldsymbol{P_A(B) = P(B)}$

**Propriété :**

- Soient A et $B$ deux événements incompatibles ($A \cap B = \emptyset$)
  Si A et B sont indépendants alors : $P_B(A) = p(A) = 0$
- A et B sont indépendants$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{P_B(A) = P(A)}$ ***ou*** $\boldsymbol{P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$

**Application :**

On lance un dé non truqué (qui a 6 faces contenant les chiffres : 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6) une fois.

Considérons les deux événements A et B : $A$: "Obtenir un nombre pair" et $B$: "Obtenir le nombre 2"

Donc : $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{2\}$

Calculer : $p(A)$ et $p(B)$ et $p(A \cap B)$ et est-ce que A et B sont indépendants ?

$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{1}{6}$

$p(A \cap B) = p(A) \times P_A(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Puisque $p(A) \times p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{6}$ alors $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$

Enfin A et B ne sont pas indépendants.

### b) Indépendance de deux épreuves

**Définition :**

Considérons une expérience comportant plusieurs épreuves sachant que chaque épreuve n'affecte pas les épreuves suivantes. On dit que l'expérience est composée par des épreuves indépendantes.

**Exemples :**

- Tirer $p$ éléments parmi $n$ éléments successivement et avec remise est une expérience composée par $p$ épreuves indépendantes.
- Lancer un dé $p$ fois est une expérience composée par $p$ épreuves indépendantes.
- Jeter une pièce de monnaie $p$ fois est une expérience composée par $p$ épreuves indépendantes.

**Propriété :**

Soient $p$ la probabilité de réalisation d'un événement A dans une expérience aléatoire. Nous répétons cette expérience $n$ fois successivement. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$.
La probabilité de réalisation d'événement A, $k$ fois exactement, dans cette expérience est : $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

**Exemple :**

On lance un dé non truqué (qui a 6 faces contenant les chiffres : 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6) une fois.

Considérons l'événement $A$: "Obtenir un nombre divisible par 3" Donc : $A = \{3; 6\}$

Nous répétons cette expérience 5 fois successivement. Calculer la probabilité pour obtenir A deux fois exactement ?

$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

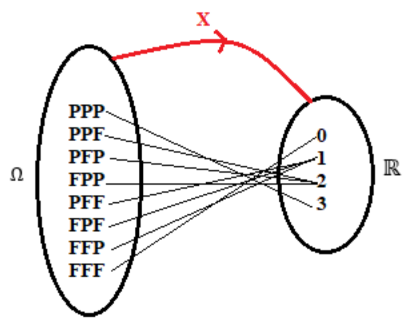
$C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} \times \frac{1}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{5\times4\times3!}{2\times3!} \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{27} = \frac{20}{2} \times \frac{8}{243} = \frac{80}{243}$

## 7- Variables aléatoires :

**Introduction :**

On lance une pièce de monnaie non truqué 3 une fois sur une table plane.

Soit l'application $X$ qui associe chaque élément de l'univers des éventualités $\Omega$ par le nombre de fois dont on obtient pille (P).



$X$ est appelé une variable aléatoire définie sur $\Omega$

**Définition :**

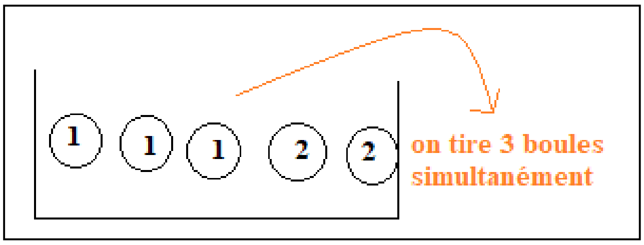
Soit $\Omega$ l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire.
Toute application définie de $\Omega$ vers $\mathbb{R}$ est appelé une variable aléatoire et on le note par : $X$ ou $Y$ ou $Z$

**Notations :**

Soit $X$ un variable aléatoire définie sur $\Omega$

→ On note l'événement « les éléments de $\Omega$ qui ont comme image $a$ par $X$ » par : $\boldsymbol{X = a}$
→ On note l'événement « les éléments de $\Omega$ qui ont une image inférieure ou égale $a$ par $X$ » par : $\boldsymbol{X \leq a}$
→ $\boldsymbol{X}(\Omega)$ est l'ensemble des images des éléments de $\Omega$ par $\boldsymbol{X}$, donc : $\boldsymbol{X}(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$

**Application :**




Soit la variable aléatoire suivante :

$X$ associe chaque tirage par le nombre des boules

Portant le nombre 2.

Donc : $\boldsymbol{X}(\Omega) = \{0,1,2\}$

$X = 0$: "$aucun\ boule\ porte\ le\ nombre$ 2" donc : $card(X = 0) = C_3^3 = 1$

$X = 1$: "$obtenir\ une\ boule\ portant\ le\ nombre$ 2" donc : $card(X = 1) = C_3^2 \times C_2^1 = 6$

$X = 2$: "$obtenir\ deux\ boules\ portant\ le\ nombre$ 2" donc : $card(X = 1) = C_3^1 \times C_2^2 = 3$

$card(\Omega) = C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2!} = 10$

Remarque :

$f(0) = p(X = 0) = \frac{card(X=0)}{card(\Omega)} = \frac{1}{10}$

$f(1) = p(X = 1) = \frac{card(X=1)}{card(\Omega)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$f(2) = p(X = 2) = \frac{card(X=2)}{card(\Omega)} = \frac{3}{10}$

L'application $f$ est appelé loi de probabilité du variable aléatoire $X$.

**Définition :**

Soit $X$ un variable aléatoire définie sur $\Omega$ et $p$ une probabilité sur $\Omega$ et $X(\Omega) = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$

→ L'application $f$ définie sur $X(\Omega)$ par : $\boldsymbol{f(x_i) = p(X = x_i) = p_i}$ $(\forall\, \boldsymbol{i = 1, \dots, n})$ est appelé **loi de probabilité du variable aléatoire $X$.**

→ **Le tableau de la loi de probabilité de $X$** est :

| $X(\Omega)$ | $x_1$ | $x_2$ | .... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i) = p(X = x_i) = p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | .... | $p_n$ |

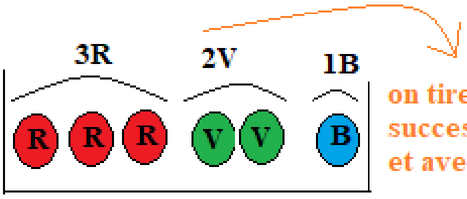
→ **L'espérance mathématique** du variable aléatoire $X$ est le nombre réel : $\boldsymbol{E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n}$

→ **La variance** du variable aléatoire $X$ est le nombre réel positif : $\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$

Avec : $\boldsymbol{E(X^2) = (x_1)^2p_1 + (x_2)^2p_2 + \cdots + (x_n)^2p_n}$

→ **L'écart type** est le nombre réel positif : $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

**Exercice :**




on tire 3 boules
successivement
et avec remise

Soit la variable aléatoire suivante : $X$ associe chaque tirage par le nombre des boules vert tirées.

1) Déterminer $card(\Omega)$

$$card(\Omega) = 6^3 = 216$$

2) Déterminer les valeurs du variable aléatoire $X$

$$\boldsymbol{X}(\Omega) = \{0,1,2,3\}$$

3) Déterminer la loi de probabilité du variable aléatoire $X$.

$f(0) = p(X = 0) = \frac{card(X=0)}{card(\Omega)} = \frac{4^3}{216} = \frac{8}{27}$

$f(1) = p(X = 1) = \frac{card(X=1)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times 2^1 \times 4^2}{216} = \frac{3\times2\times16}{216} = \frac{4}{9}$

$f(2) = p(X = 2) = \frac{card(X=2)}{card(\Omega)} = \frac{C_3^2 \times 2^2 \times 4^1}{216} = \frac{3\times4\times4}{216} = \frac{2}{9}$

$f(3) = p(X = 3) = \frac{card(X=3)}{card(\Omega)} = \frac{2^3}{216} = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}$

4) Donner le tableau de la loi de probabilité de $X$.

| $X(\Omega)$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i) = p(X = x_i) = p_i$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{27}$ |

5) Calculer $E(X)$ et $V(X)$ et $\sigma(X)$

$E(X) = 0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{27} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{3}{27} = \frac{27}{27} = 1$

$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$E(X^2) = 0^2 \times \frac{8}{27} + 1^2 \times \frac{4}{9} + 2^2 \times \frac{2}{9} + 3^2 \times \frac{1}{27} = \frac{4}{9} + \frac{8}{9} + \frac{3}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

$V(X) = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.81$

## 8- Variable aléatoire binomiale :

**Définition :**

Soient $p$ la probabilité de réalisation d'un événement A dans une expérience aléatoire. Nous répétons cette expérience $n$ fois indépendamment.
Soit $X$ la variable aléatoire qui associe chaque possibilité de cette expérience par le nombre de fois où l'événement A est réalisable.
$X$ est appelé **une variable aléatoire binomiale de paramètres $n$ et $p$.**
La loi de probabilité de $X$ est appelé **une loi de probabilité binomiale de paramètres $n$ et $p$.**

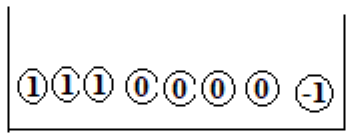
**Propriété :**

Soit $X$ une variable aléatoire binomiale de paramètres $n$ et $p$ donc : $\boldsymbol{X}(\Omega) = \{0,1,2,3,\dots,n\}$
→ Loi de probabilité de $X$ est définie sur $\boldsymbol{X}(\Omega)$ par :

$$\boldsymbol{f(k) = p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}} \text{ avec } 0 \le k \le n \;\; et \; k \in \mathbb{N}$$

→ L'espérance mathématique de $X$ est : $\boldsymbol{E(X) = np}$
→ La variance de $X$ est : $\boldsymbol{V(X) = np(1-p)}$
→ L'écart type de $X$ est : $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$

**Exercice :**




on tire 3 boules simultanément

1) Déterminer $card(\Omega)$

$$card(\Omega) = C_8^3 = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = 56$$

2) Soit l'événement : $A$:"$la\ somme\ des\ chiffres\ est\ 0$". Calculer $p(A)$

$card(A) = C_4^3 + C_3^1 C_4^1 C_1^1 = 4 + 3 \times 4 \times 1 = 16$

$p(A) = \frac{card\ (A)}{card(\Omega)} = \frac{16}{56} = \frac{2}{7}$

3) Nous répétons cette expérience 4 fois indépendamment. Soit $X$ la variable aléatoire qui associe chaque possibilité de cette expérience par le nombre de fois où l'événement A est réalisable.

Déterminer la loi de probabilité de $X$.

$\boldsymbol{X}(\Omega) = \{0,1,2,3,4\}$

$f(0) = p(X = 0) = C_4^0 \left(\frac{2}{7}\right)^0 \left(1 - \frac{2}{7}\right)^{4-0} = \frac{625}{2401}$

$f(1) = p(X = 1) = C_4^1 \left(\frac{2}{7}\right)^1 \left(1 - \frac{2}{7}\right)^{4-1} = 4 \times \frac{2}{7} \times \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{1000}{2401}$

$f(2) = p(X = 2) = C_4^2 \left(\frac{2}{7}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{7}\right)^{4-2} = 6 \times \frac{4 \times 25}{2401} = \frac{600}{2401}$

$f(3) = p(X = 3) = C_4^3 \left(\frac{2}{7}\right)^3 \left(1 - \frac{2}{7}\right)^{4-3} = 4 \times \frac{8 \times 5}{2401} = \frac{160}{2401}$

$f(4) = p(X = 4) = C_4^4 \left(\frac{2}{7}\right)^4 \left(1 - \frac{2}{7}\right)^{4-4} = \frac{16}{2401}$

4) Calculer $E(X)$ et $V(X)$ et $\sigma(X)$

Puisque $X$ est un variable aléatoire binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{2}{7}$ alors :

$E(X) = 4 \times \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$

$V(X) = 4 \times \frac{2}{7}\left(1 - \frac{2}{7}\right) = \frac{8}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{40}{7}$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{40}{7}} \approx 0.9$