

LES FONCTIONS EXPONENTIELLES

I) LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

1. Définition :

La réciproque de la fonction \ln s'appelle La fonction exponentielle népérienne notée $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$.

Autre expression de \exp :

Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $a \in]0, +\infty[$, On a : $\exp(r) = a \Leftrightarrow r = \ln(a) \Leftrightarrow \ln(e^r) = \ln(a) \Leftrightarrow a = e^r$.

Donc $\exp(r) = e^r$ pour tout r de \mathbb{Q} . On prolonge cette expression à \mathbb{R} et on aura :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp(x) = e^x$$

2. Propriétés :

* La fonction \exp est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

$$\star e^1 = e \quad e^0 = 1 \quad e^x > 0, \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

$$\star (\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x \quad (\forall x \in]0, +\infty[) : e^{\ln(x)} = x$$

$$\star \begin{cases} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in]0, +\infty[\end{cases}$$

* Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a : $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

$$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

* Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in]0, +\infty[$, on a :

$$e^x > a \Leftrightarrow x > \ln(a) \quad e^x < a \Leftrightarrow x < \ln(a)$$

3. les limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

4. l'étude de la fonction \exp

➤ La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} et $(e^x)' = e^x, \quad (\forall x \in \mathbb{R})$.

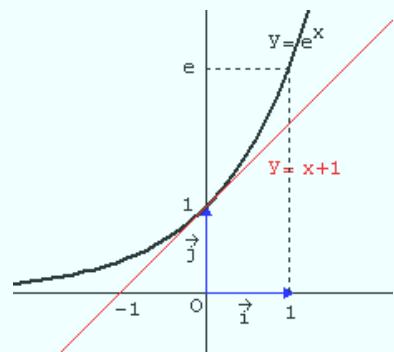
➤ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}, \quad (\forall x \in I)$.

T.v et (C_{\exp}) :

| | | |
|--------------|-----------|-----------|
| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f(x) = e^x$ | + | |
| $f(x) = e^x$ | 0 | $+\infty$ |

1/2

(C_{\exp})



II) L'EXPONENTIELLE À BASE a ($a > 0$ ET $a \neq 1$)

1. Définition :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

L'exponentielle à base a est la fonction $\exp_a : x \mapsto e^{x \ln(a)} = a^x$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp_a(x) = e^{x \ln(a)} = a^x$$

2. Propriétés :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a :

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad a^{xy} = (a^x)^y \quad a^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur \mathbb{R} et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : (a^x)' = \ln(a)a^x$.

➤ $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$, $0 < a < 1$

➤ $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$, $a > 1$

on pose $f(x) = a^x$

$$0 < a < 1$$

| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------------------|-----------|--------------|
| $f'(x) = \ln(a)a^x$ | — | |
| $f(x) = a^x$ | $+\infty$ | $\searrow 0$ |

$$a > 1$$

| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------------------|-----------|--------------------|
| $f'(x) = \ln(a)a^x$ | + | |
| $f(x) = a^x$ | 0 | $\nearrow +\infty$ |

$$a = \frac{1}{2}$$

$$a = 2$$

