

# LES FONCTIONS EXPONENTIELLES

## I) LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE

### 1. Définition :

La réciproque de la fonction  $\ln$  s'appelle La fonction exponentielle népérienne notée  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$ .

Autre expression de  $\exp$  :

Soient  $r \in \mathbb{Q}$  et  $a \in ]0, +\infty[$ , On a :  $\exp(r) = a \Leftrightarrow r = \ln(a) \Leftrightarrow \ln(e^r) = \ln(a) \Leftrightarrow a = e^r$ .

Donc  $\exp(r) = e^r$  pour tout  $r$  de  $\mathbb{Q}$ . On prolonge cette expression à  $\mathbb{R}$  et on aura :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp(x) = e^x$$

### 2. Propriétés :

★ La fonction  $\exp$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$\star e^1 = e \qquad e^0 = 1 \qquad e^x > 0, (\forall x \in \mathbb{R}).$$

$$\star (\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x \qquad (\forall x \in ]0, +\infty[) : e^{\ln(x)} = x$$

$$\star \begin{cases} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in ]0, +\infty[ \end{cases}$$

★ Soient  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $r \in \mathbb{Q}$ , on a :  $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

$$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

$$e^x \times e^y = e^{x+y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$e^{rx} = (e^x)^r$$

★ Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $a \in ]0, +\infty[$ , on a :

$$e^x > a \Leftrightarrow x > \ln(a)$$

$$e^x < a \Leftrightarrow x < \ln(a)$$

### 3. les limites

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0, (\forall n \in \mathbb{N})$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, (\forall n \in \mathbb{N})$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
--	--	--

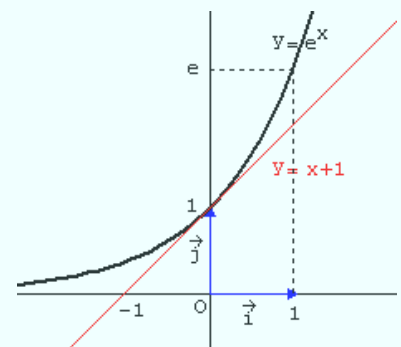
### 4. l'étude de la fonction $\exp$

- La fonction  $x \mapsto e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $(e^x)' = e^x, (\forall x \in \mathbb{R})$ .
- Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ , alors la fonction  $x \mapsto e^{u(x)}$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}, (\forall x \in I)$ .

T.v et  $(C_{\exp})$  :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)=e^x$	+	
$f(x)=e^x$	0	$+\infty$

$(C_{\exp})$



## II) L'EXPONENTIELLE À BASE $a$ ( $a > 0$ ET $a \neq 1$ )

### 1. Définition :

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

L'exponentielle à base  $a$  est la fonction  $\exp_a : x \mapsto e^{x \ln(a)} = a^x$  et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp_a(x) = e^{x \ln(a)} = a^x$$

### 2. Propriétés :

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ . On a :

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad a^{xy} = (a^x)^y \quad a^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

La fonction  $x \mapsto a^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : (a^x)' = \ln(a)a^x$ .

$$\text{➤ } a^x < a^y \Leftrightarrow x > y, 0 < a < 1$$

$$\text{➤ } a^x < a^y \Leftrightarrow x < y, a > 1$$

on pose  $f(x) = a^x$

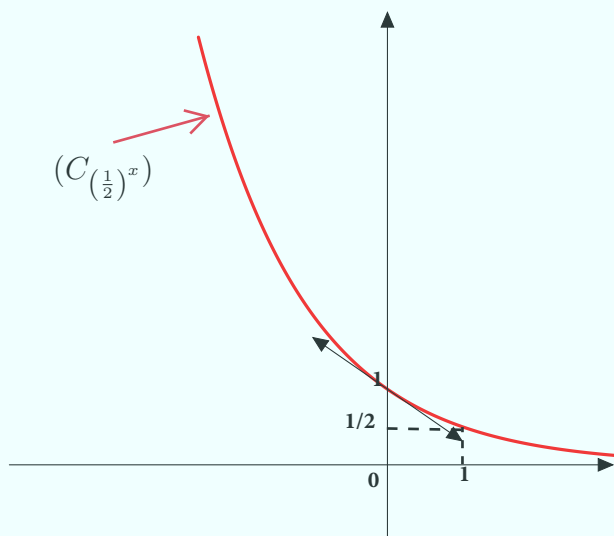
$$0 < a < 1$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x) = \ln(a)a^x$	-	
$f(x) = a^x$	$+\infty$	$0$

$$a > 1$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x) = \ln(a)a^x$	+	
$f(x) = a^x$	$0$	$+\infty$

$$a = \frac{1}{2}$$



$$a = 2$$

