FILALI JAOUAD

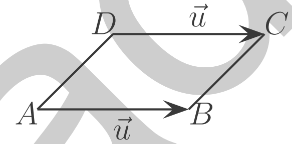
CALCUL VECTORIEL

TRONC COMMUN

I - DÉFINITION

Définition *Soit A et B deux points distincts. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par*
- *sa direction : celle de la droite (AB)*
- *son sens : de A vers B*
- *sa longueur, ou norme, notée AB ou $||\overrightarrow{AB}||$: la distance de A à B*

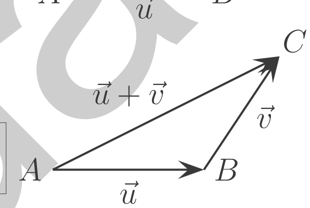
Vecteurs égaux : Deux vecteurs non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même longueur.



Propriété $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.*

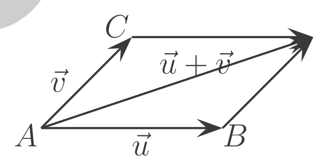
II -ADDITION

1)Relation de Chasles



Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ deux vecteurs, alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

2)Autre construction : règle du parallélogramme

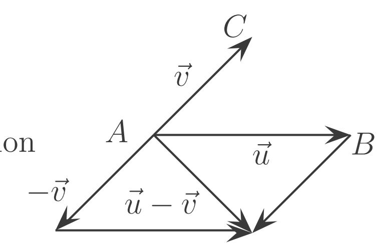


Soient $\vec{u} = AB$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs, alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

3)Opposé d'un vecteur

D'après la relation de Chasles, on a, pour tout point A et B, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ (vecteur nul).
Ainsi, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$: on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.

4)Soustraction



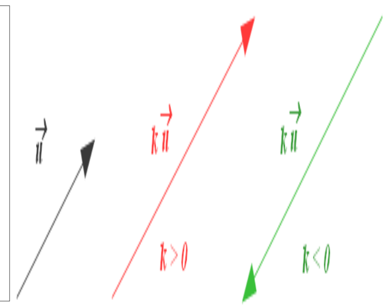
Soient $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs, alors on définit la soustraction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$$

III - MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN NOMBRE RÉEL

1- Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque (non nul) et k un nombre réel non nul.
On appelle ***produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre réel k***, le vecteur noté $k\vec{u}$ ayant :
- la même direction que $\vec{u}$;
- le même sens si $k > 0$; et de sens contraire si $k < 0$;
- une norme égale à k fois la norme de $\vec{u}$ si $k > 0$; et à $(-k)$ fois la norme de $\vec{u}$ si $k > 0$.



Remarque :
Si $k = 0$ ou si $\vec{u} = \vec{0}$, alors : $0.\vec{u} = \vec{0}$ et $k.\vec{0} = \vec{0}$.

2- Calcul vectoriel

Théorème 1:

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$; et tous nombres réels a et b, on a les propriétés suivantes :

P1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ On peut changer l'ordre des vecteurs ;

P2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ On peut faire des groupements ;

P3) $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

P4) $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

P5) $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$

P6) $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$

P7) $(k\times k')\vec{u}=k(k'\vec{u})$

P8) $1\vec{u}=\vec{u}$

3- Vecteurs colinéaires

Définition :

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** lorsqu'ils ont la même direction.

Théorème 2:

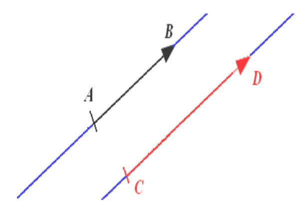
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si, il existe un nombre réel k, tel que : $\vec{v}=k\vec{u}$, si et seulement si, il existe un nombre réel k', tel que : $\vec{u}=k'\vec{v}$

4 . Conséquences :

4.1) parallélisme et alignement

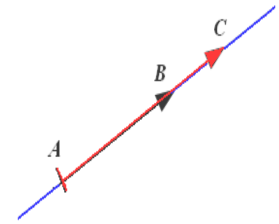
Théorème 3:

Soit A, B, C et D quatre points du plan. Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, si et seulement si, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



Théorème 4:

Soient A, B, et C trois points du plan. Les trois points A, B et C sont alignés, si et seulement si, deux des trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.



4.2) Milieu d'un segment

Théorème 5:

Soit A, B et I trois points du plan. Le point I est le milieu du segment [AB] si et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée :

1°) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ 2°) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 2°bis) $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 3°) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$