EQUATIONS , INÉQUATIONS ET SYSTÈMES

I. EQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE :

Activité : (révision)résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\frac{x-3}{2}=\frac{x}{3} \quad ; \quad x-\frac{3x+4}{2}=\frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{3x+1}{2}-\frac{3-x}{3}=1$$

II. EQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS IR :

1) Equation produit nul ou du type x²=a :

Activité :(révision):

résoudre les équations suivantes :

$x^2-4=0$; $x^2-2x=0$; $x^2-2x+1=0$

2) Equation du second degré :

Définition : une équation du second degré à une inconnue x (nombre réel) est une équation de la forme : $ax^2+bx+c=0$ avec $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$.

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs de x pour les quelles $ax^2+bx+c=0$.

Activité1 : On considère le trinôme du second degré : $P(x)=ax^2+bx+c$

avec $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$

montrer que : $P(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Définitions : l'expression $a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ est appelée la forme canonique du trinôme de second degré ax^2+bx+c.

Le nombre b^2-4ac est appelé discriminant de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ ou du trinôme ax^2+bx+c on le note Δ (lire ''delta'').

Activité2 : (le cas général)

Résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ en utilisant la forme canonique

Conclusion: Trois cas se présentent :

Si $\Delta>0$ alors l'équation a deux solutions (ou racines) $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta=0$ alors l'équation a une seule solution (ou racine) $x=\frac{-b}{2a}$.

Si $\Delta<0$ alors l'équation n'a pas de solution .

Exemple : on considère l'équation $x^2-3x+2=0$

on a $a=1$, $b=-3$ et $c=2$ donc le discriminant de cette équation est

$\Delta=(-3)^2-4\times1\times2=9-8=1$ d'où l'équation a deux solutions :

$$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{2}{2}=1 \text{ ou } x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+\sqrt{1}}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$$

Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^2+x+1=0$; $-6x^2+x+1=0$; $x^2-7x=-12$; $3x^2-x-4=0$

Remarque : il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant, c'est le cas des équations suivantes : $x^2-4=0$; $x^2-2x=0$; $x^2-2x+1=0$

3) La somme et le produit des racines d'une équation du second degré :

Activité : on considère l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$

supposons que cette équation admet deux solutions x_1 et x_2

écrire x_1+x_2 et $x_1\times x_2$ en fonction de a , b et c

Conclusion : si une équation du second degré admet deux solutions x_1 et x_2 alors :

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad x_1\times x_2=\frac{c}{a}$$

Remarque : il est utile de retenir que si on connait a priori une racine alors on peut obtenir à l'aide de ces formules la valeur de la deuxième.

Théorème : si a et c n'ont pas le même signe alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes ; la réciproque n'est pas toujours vraie .

Application : on considère l'équation : $x^2+2x-3=0$

sans calculer Δ,

1) montrer que cette équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 .
2) calculer $x_1\times x_2$ et déterminer une racine évidente puis déduire la deuxième racine.

4) Factorisation d'un Trinôme du second degré :

Activité : on considère le trinôme du second degré : $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$

en utilisant la forme canonique, factoriser $P(x)$

Conclusion : Trois cas se présentent :

Si $\Delta>0$ alors $P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ avec x_1 et x_2 les deux racines de $P(x)$

Si $\Delta=0$ alors $P(x)=a(x-x_1)^2$ avec x_1 est la seule racine de $P(x)$

Si $\Delta<0$ alors on ne peut pas factoriser $P(x)$

5) Le signe d'un Trinôme du second degré :

Activité : on considère le trinôme du second degré : $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$

déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de .

6) Les inéquations du second degré :

Activité : résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$x^2-3x+2<0$; $-6x^3+x^2+x\geq 0$

III. LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS :

1) Equations du premier degré à deux inconnues :

Activité1 : résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'équation $2x+y=1$

Conclusion: - résoudre une équation du premier degré à deux inconnues c'est déterminer tous les couples $(x;y)$ qui vérifient cette équation.

- Cette équation a donc une infinité de solutions donc impossible d'écrire l'ensemble de ses solutions en extension, on peut l'écrire seulement en compréhension :

$$S=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / y=1-2x\}$$

- graphiquement l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des couples des coordonnées des points de la droite d'équation $2x+y=1$

2) Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues :

Activité1 : résoudre dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode de substitution les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x + 7y = 11 \\ -5x + y = 7 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Activité2 : résoudre par la méthode des combinaisons linéaires les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 7x - 2y = 8 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

Activité3 : résoudre par la méthode des combinaisons linéaires le système : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Conclusion :

- résoudre un système de deux équations à deux inconnues c'est déterminer tous les couples $(x;y)$ qui vérifient simultanément les deux équations.

Méthode de Kramer

Le nombre réel $ab' - a'b$ est appelé le déterminant du système et on le note Δ $\left(\Delta = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\right)$

Deux cas se présentent

Si $\Delta \neq 0$ alors $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta};\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$ est la seule solution du système avec :

$$\Delta_x = cb' - c'b = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

Si $\Delta = 0$ alors $0 = \Delta_y$ et $0 = \Delta_x$

donc deux sous cas $S = \varnothing$ ou les deux équations sont équivalentes il suffit de résoudre une des deux.

Application: résoudre dans $\mathbb{R}^2$ par la méthode des déterminants les deux systèmes :

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 3 \end{cases}$$