Produit scalaire dans le plan

I. Produit scalaire de deux vecteurs

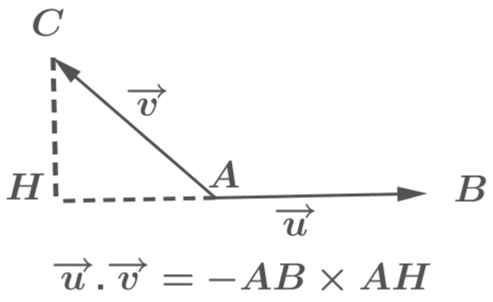
Définition:

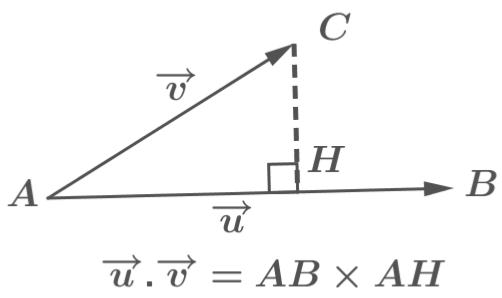
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A, B et C trois points du plan tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Le ***produit scalaire*** des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le ***nombre réel*** défini comme suit :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens, alors : $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AH$.
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens contraires, alors : $\vec{u}.\vec{v} = -AB \times AH$.



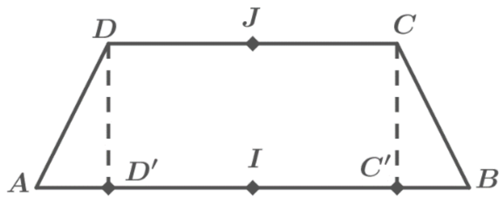


Application ①:

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle tel que:

$AB = 6$ et $CD = 5$ et soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. (voir la figure).

Calculer les produits scalaires suivants :



- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC'}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{ID}$

Propriété : Formule trigonométrique du produit scalaire

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\overline{\vec{u};\vec{v}})$.
- Soient A, B et C trois points du plan, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(BAC)$.

Application ②:

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans les deux cas suivants :

❶ $\|\vec{u}\| = 1,\ \|\vec{v}\| = \sqrt{3},\ et\ \left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

❷ $\|\vec{u}\| = 2,\ \|\vec{v}\| = \frac{2}{\sqrt{2}},\ et\ (\overline{\vec{u};\vec{v}}) \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]$.

2) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 4$. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

3) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 6$. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.

4) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Déterminer les mesures possibles de l'angle orienté $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ sachant que : $\|\vec{u}\| = 4,\ \|\vec{v}\| = \sqrt{2},\ et\ \vec{u}.\vec{v} = -2\sqrt{6}$.

Exercice :

ABC un triangle isocèle en A tels que $AB = 3$ et $BC = 3\sqrt{3}$.

1) Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

2) En déduire $A\widehat{C}B$ et $C\widehat{A}B$.

II. Propriétés du produit scalaire :

Propriété :

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel. On a :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\left(k\vec{u}\right).\vec{v} = \vec{u}.\left(k\vec{v}\right) = k\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$
- $\vec{u}.\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2$ ($\vec{u}^2$ est appelé ***carré scalaire*** de $\vec{u}$)

Application ③:

Soients $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que : $\left\|\vec{u}\right\| = 2,\ \left\|\vec{v}\right\| = 3, et \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Calculer $\vec{u}.\vec{v}, \vec{u}^2, \vec{v}^2$ $et\ (2\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v})$.

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$
- $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(-\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$

Application ④:

1) Soients $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\left\|\vec{u}\right\| = 2,\ \left\|\vec{v}\right\| = 3, et \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$ *et* $(\overrightarrow{2u} - \overrightarrow{3v})^2$.

2) Soients $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{2},\ \left\|\vec{v}\right\| = 2, et \left\|\vec{u} + \vec{v}\right\| = 7$.

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$ *et* $\left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|$.

Propriété :

Soients A, B et C trois points du plan, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

Démonstration:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)\end{aligned}$$

✍ Application ⑤:

1) Soient A, B et C trois points du plan tels que : $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$ et $BC = \sqrt{2}$.

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}$.

2) Soit ABC un triangle rectangle en A. Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Propriété :

> Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
>
> $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***orthogonaux***, et on écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$, si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

✍ Application ⑥:

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux du plan tels que : $\|\vec{u}\| = 4$, et $\|\vec{v}\| = 5$.

Déterminer le réel m sachant que : $\left(m\vec{u} + \vec{v}\right).\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = 13$.

✍ Exercice :

ABC est un triangle $AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$ et $\cos(\hat{A}) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Considérons D un point du plan défini par : $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$.

a)- Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

b)- Conclure.

III. Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle. On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

Donc : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Par conséquent : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(BAC)$.

Théorème : Théorème d'Al-Kashi

> Soit ABC un triangle. On a :
>
> - $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\hat{A})$
> - $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos(\hat{C})$
> - $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos(\hat{B})$

✍ Application ⑦:

1) ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 5$ et $\hat{A} = \dfrac{\pi}{4}$. Calculer BC.

2) MNP est un triangle tel que $MN = \sqrt{3}$, $NP = 2$ et $\hat{N} = \dfrac{5\pi}{6}$. Calculer MP.

IV. Théorème de la médiane

Soit ABM un triangle et I le milieu de $[AB]$.

Calculons $MA^2 + MB^2$ en fonction de MI et AB.

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2\,MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

Théorème : théorème de la médiane

Soit ABM un triangle et I le milieu de $[AB]$. On a : $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$.

Application ⑧:

ABM un triangle et I , J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AM]$ et $[BM]$.

Sachant que : $AB=4$, $AM=3$ et $BM=4$, calculer les distances MI , AK et BJ .

Exercice :

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $\widehat{BAD}=\frac{\pi}{3}$ et $AD=4$ et $CD=6$ et soit O le milieu du segment $[\boldsymbol{AB}]$.

1) Calculer les distances BD et AC .

2) Montrer que pour tout point M du plan que $MA^2+MB^2=2MO^2+18$.

3) En déduire l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2+MB^2=24$.

V. Relations métriques dans un triangle rectangle

Propriété :

Soient ABC un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (AB) et I le milieu de $[BC]$.

ABC est rectangle en ABC si et seulement si l'une des relations suivantes est vérifiée :

- ✓ $BC^2=AC^2+AB^2$.
- ✓ $AB^2=BH\times BC$.
- ✓ $AH^2=HB\times HC$.
- ✓ $AI=\frac{1}{2}BC$.

Application ⑨:

Soient ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC) et AB=3 , AC=4 .

Calculer les longueurs BC, HC, HB et AH

Exercice de synthèse :

Soit ABC un triangle tel que : $AB=3$ et $AC=1$ et . $\cos(BAC)=\frac{-1}{3}$

1) Vérifier que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-1$.

2) Calculer la distance BC .

3) Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$.

a/- Calculer AI et BJ.

b/- Calculer $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.

4) Soit E un point du plan tel que : $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$.

a/- Ecrire le vecteur $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b/- Montrer que les droites (AB) et (IE) sont perpendiculaires .