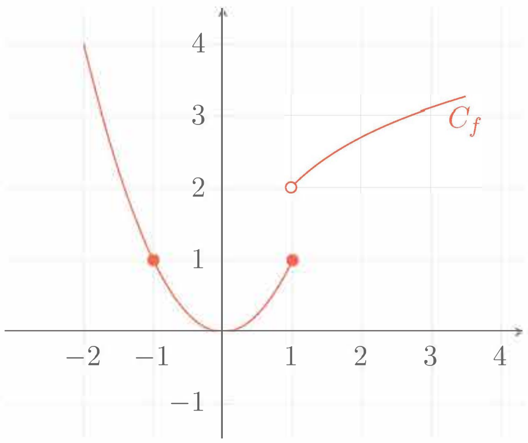
CONTINUITÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

2 BAC PC ET SVT

1- CONTINUITÉ EN UN POINT

Activité

Dans la figure suivante, (C_f) est la courbe repr ésentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Calculer graphiquement $f(-1)$ et $\lim\limits_{x \to (-1)} f(x)$.
2. Calculer graphiquement $f(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$. Que peut-on déduire ?

Définition 1

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $\mathbb{I}$, et $n \in \mathbb{I}$.

On dit que la fonction f est continue en (x_0), si et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple

La fonction $f :\longmapsto \frac{1}{x}$ est continue en 1 car :

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1 = f(1).$$

Remarque

Attention ! on ne peut pas parler de la continuité de la fonction f en $x_0 = 0$, car : $0 \notin D_f$.

Application 1

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ; \ x \neq 0, \\ f(0) = \dfrac{-1}{2}. & \end{cases}$$

f Est-il continue en $x_0 = 0$?

2-CONTINUITÉ À DROITE ET À GAUCHE D'UN PT

Définition 2

Soit $a \in \mathbb{R}$

- Soit f est une fonction définie sur un intervalle de type $[a, a+\alpha[$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est une fonction continue à droite en a si et seulement si : $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- Soit f est une fonction définie sur un intervalle de type $]a-\alpha, a]$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est une fonction continue à gauche en a si et seulement si : $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Exemple

Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x<\frac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2x} & \text{si } x\geq\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Étudions la continuité à gauche et à droite en $x=\frac{1}{2}$.

On a : $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} 2x+1=2.$

et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{1}{2x}=1.$

On remarque que la limite de f à gauche en $\frac{1}{2}$ est différente de celle à droite, alors f est discontinue en 1/2

Application 2

Soit g une fonction définie par :

$$g(x)=\begin{cases}x^2-2 & \text{si } x\leq 2,\\ \sqrt{x-2} & \text{si } x>2.\end{cases}$$

étudier la continuité à gauche et à droite en 2.

Définition 3

On dit que la fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.

Application 3

Soit E la fonction de le partie entière telle que $E(x)=k,\ \ k\leq x<k+1\ ,\ k\in\mathbb{N}^*.$
Étudier la continuité à gauche et à droite en $n\in\mathbb{N}$, puis déduire la continuité en n et trouver a courbe de E.

Application 4

Soit f la fonction numérique suivante définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{cos(x)-xsin(3x)-1}{x^3} & \text{si } x\neq 0,\\ f(0)=\frac{-7}{2}.\end{cases}$$

Démontrer que la fonction f continue en $x_0=0$.

Application 5

Soit f est une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}x+a & \text{si } x<1,\\ 2x-3 & \text{si } 1\leq x\leq 3,\\ bx+1 & \text{si } x>3,\end{cases}$$

Déterminer a et b sachant que f est continue à droit en 3 et à gauche en 1.

3-Continuité sur un intervalle

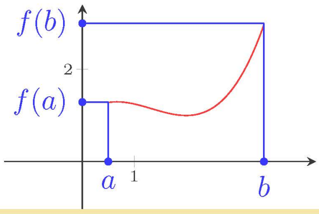
Définition 4

Soit f est une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$.

- On dit que f est continue sur $]a,b[$ si et seulement si f est continue en tout point de $]a,b[$.
- On dit que f est continue sur $[a,b]$ si et seulement si f est continue en tout point de $]a,b[$ et continue à droit en a et à gauche en b.

Remarque

- On définie de même la continuité d'une fonction définie sur les intervalles $[a,b[$ et $]a,b]$ et $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$.
- la courbe d'une fonction f continu sur $[a,b]$ est représenté par un trait continue ces extrémités sont les deux points : $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$.



Propriété 1

- toute fonction polynômiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- toute fonction rationnel est continue sur son domaine de définition.
- la fonction $x\longmapsto\sin x$ et la fonction $x\longmapsto\cos x$ est continues sur $\mathbb{R}$.
- la fonction $x\longmapsto\tan x$ est continue sur son domaine de définition.
- la fonction $x\longmapsto\ \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- la fonction de la partie entière continue à droit en k et discontinue à gauche en k, pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

exemple 1

Montrons que la fonction suivante et continue sur $\mathbb{R}-\{2\}$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{si } x\in\mathbb{R}-\{2\}\\ f(2)=1 & \text{si } x\neq 2.\end{cases}$$

On $x\longmapsto \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ est continue sur $\mathbb{R}-\{2\}$ car f est une fonction rationnel.
D'autre part, f est continue en 2, car :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2} x-1\\ &= 1 = f(2).\end{aligned}$$

alors f est continue en 2.
Enfin, f est continue sur $\mathbb{R}-\{2\}$

exemple 2

Montrons que la fonction suivante et continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\,,\\ \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x\in[0,1[\,\cup\,]1,+\infty[\,.\end{cases}$$

- Montrons que f est continue sur $]-\infty,0[$.

On a $x\longmapsto x+1$ est une fonction polynômiale alors elle est continu sur $\mathbb{R}$, et par la suite sur $]-\infty,0[\ \ (car\ ]-\infty,0[\,\subset\mathbb{R})$.

- Montrons que f est continue sur $[0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$.

$x\longmapsto\dfrac{1}{1-x}$ est continu sur $\mathbb{R}-\{1\}$ car f est une fonction rationnel, alors elle est continue sur $[0,1[\cup[1,+\infty[$ puisque $[0,1[\cup]1,+\infty[\,\subset\mathbb{R}-\{1\}$.

- Montrons que f est continue en 0.

On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x+1=1$
et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-x}=1$
alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$, ainsi f est continue en 0.
On conclu que f est continue sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

APPLICATION 6

Soit f est une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{3-x} & \text{si } x<1,\\ x-\sqrt{x-2} & \text{si } x\geq 2.\end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

4-LES OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES

POPOSITION 1

Soit f et g deux fonctions numériques continues sur un intervalle $\mathbb{I}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

- les fonctions $(f+g)$, $f\times g$ et $\alpha\times f$ sont continues sur $\mathbb{I}$.
- Si de plus, $g(x)\neq 0\quad\forall x\in\mathbb{I}$, alors les deux fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues sur $\mathbb{I}$.

exemple

Soit les deux fonctions suivantes

$$u(x)=3cos(x)+x^3+2 \text{ et } v(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

Montrons que u st continue sur $\mathbb{R}$ et que v est continue sur $\mathbb{R}_+^*-\{1\}$.

- On a $x\longmapsto 3cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x\longmapsto x^3+2$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors u est continue sur $\mathbb{R}$.
- On a $x\longmapsto x+1$ est continue sur $\mathbb{R}^*-\{1\}$ et On a $x\longmapsto\sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*-\{1\}$, alors v est continue sur $\mathbb{R}^*-\{1\}$.

5-LA CONTINUITE DE LA COMPOSÉE

POPOSITION 2

Soient f et g deux fonctions numériques, $\mathbb{I}$ et $\mathbb{J}$ deux intervalles, si :

- f et g sont continues sur $\mathbb{I}$ et $\mathbb{J}$ respectivement,
- $f(\mathbb{I})\subset\mathbb{J}$.

Alors $g\circ f\,(x)$ est continue sur $\mathbb{I}$.

exemple

Considérons la fonction u défini sur $\mathbb{I} =]0, +\infty[$ par $u(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$.

On pose : $\quad f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Alors

$$u(x) = g \circ f(x) \quad \forall x \in]0 + \infty[.$$

On a f est continue sur $\mathbb{I}$ et g est continue sur $\mathbb{J}$=$[0, +\infty[$.

d'autre part $f(\mathbb{I}) =]0, +\infty[\subset \mathbb{J}$.

alors $f \circ g$ est continue sur $\mathbb{I}$.

6-IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

Activité

1. Soient f et g deux fonction numériques définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \ ; \ g(x) = -x + 1.$$

   a) Tracer les courbe C_f et C_g des fonctions f et g dans un repaire orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   b) Déterminer les images des intervalles suivantes par f et g :
   $[1, 2]$; $]0, 2[$; $]-\infty, 1]$; $[1, 2] \cup [3, +\infty[$.

2. Soit E la fonction de la partie entière.
   Déterminer $\mathbb{J}$ l'image de $]0, 3[$ par la fonction E.
   Est-ce que $\mathbb{J}$ est un intervalle ?

POPOSITION 1

- L'image d'une partie par une fonction continue est une partie.
- l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

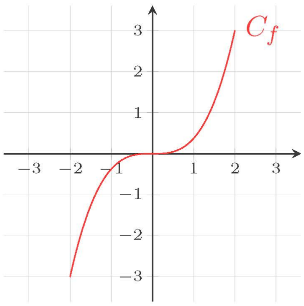
Fonctions continues est monotones

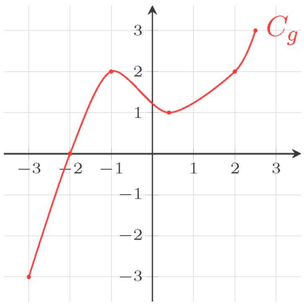
f continue et strictement croissante	
L'intervalle $\mathbb{I}$	L'intervalle $f(\mathbb{I})$
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x \to b} f(x)\right[$
$]a, b]$	$\left]\lim\limits_{x \to a} f(x), f(b)\right]$
$]a, b[$	$\left]\lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{x \to b} f(x)\right[$

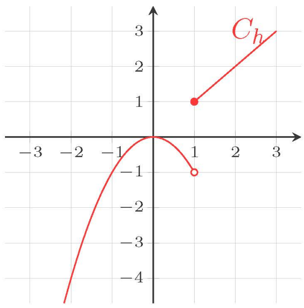
f continue et strictement décroissante	
L'intervalle $\mathbb{I}$	L'intervalle $f(\mathbb{I})$
$[a, b]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$\left[f(b), \lim\limits_{x \to a} f(x)\right[$
$]a, b]$	$\left]\lim\limits_{x \to b} f(x), f(a)\right]$
$]a, b[$	$\left]\lim\limits_{x \to b} f(x), \lim\limits_{x \to a} f(x)\right[$

Activité

Dans les trois figures suivantes, C_f, C_g et C_h sont des courbes des fonctions f, g et h respectivement.







1. Déterminer graphiquement $f([-2, 2])$, $g([-2, 2])$ et $h([-2, 2])$.

2.a) Soit $k \in f([-2, 2])$, suivant les valeurs possibles de k dans $f([-2, 2])$, donner le nombre des solutions de l'équation $f(x) = k$.

b) Suivant les valeurs possibles de k dans $g([-2, 2])$, donner le nombre des solutions de l'équation $g(x) = k$.

3. Suivant les valeurs possibles de k dans $h([-2, 2])$, donner le nombre des solutions de l'équation $h(x) = k$.

7-THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a,b]$ tel que : $f(c) = k$

REMARQUE

- On dit aussi que l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c dans $[a,b]$.
- Pour montrer que l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a,b]$, on doit vérifier que :

  - f est continue sur $[a,b]$
  - k compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Exemple

Montrons que l'équation $cos(x) \times x = \frac{1}{4}$ admet au moins une solution dans $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

On pose :

$$f(x) = cos(x) \times x \quad ,\forall x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right].$$

- On a $x \longmapsto cos(x)$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ et $x \longmapsto x$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, alors f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

- On a

$$f(-\frac{\pi}{3}) = cos(-\frac{\pi}{3}) \times (-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\pi}{6}$$

et

$$f(\frac{\pi}{3}) = cos(\frac{\pi}{3}) \times (\frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{6},$$

Alors $\frac{1}{4} \in \left[-\pi 6, \frac{\pi}{6})\right]$.

Alors $\frac{1}{4} \in \left[f(-\frac{\pi}{3}), f(\frac{\pi}{3})\right]$.

Ainsi l'équation $cos(x) \times x = \frac{1}{4}$ admet au moins une solution dans $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

APPLICATION 7

Montrer que l'équation $\frac{sin(x)}{x} = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

POPOSITION 2

Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle $[a,b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel unique $c \in [a,b]$ tel que : $f(c) = k$

Remarque

Cette proposition est un cas du théorème précédant. En ajoutant la condition de la monotonie sur f, on obtient l'unicité des solutions de l'équation $f(x) = k$.

POPOSITION 3

Si f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$.
si f est strictement monotone sur [a,b] l'equation admet une solution sur l'intervalle [a,b]

Application 8

Montrer que l'équation $sin(x) + \frac{x}{2} = 0$ admet au moins une solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

8-FONCTIONS RÉCIPROQUES

Activité

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

1. Montrer que f est continue et strictement monotone sur $[0, +\infty[$.
2. calculer $f([0, +\infty[)$.

3. Soit $x \in [0, +\infty[$ et $y \in f([0, +\infty[)$.
   Montrer que

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{y+1}$$

la fonction $y \longmapsto 1 + \sqrt{y+1}$ est appelée la fonction réciproque de f.

POPOSITION 4

Soit f est une fonction numérique continue et strictement monotone sur un intervalle $\mathbb{I}$.

Pour tout y de $f(\mathbb{I})$, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans l'intervalle $f(\mathbb{I})$.

DÉfiNITION 5

Soit f une fonction numérique continue et strictement monotone sur un intervalle $\mathbb{I}$, et $\mathbb{J}$ l'image de l'intervalle $\mathbb{I}$ par la fonction f.

la fonction qui associe tout élément y de $\mathbb{J}$ à son antécédent x de $\mathbb{I}$ telle que $f(x) = y$, est appelée la fonction réciproques de la fonction f, et on la note par : f^{-1}.

Remarque

- $\forall y \in \mathbb{J}\ \exists! x \in \mathbb{I}$ tel que $f(x) = y$.
- $(\forall x \in \mathbb{I}\ ;\ f^{-1} \circ f(x) = x$.
- $(\forall x \in f(\mathbb{I})\ ;\ f^{-1} \circ f(x) = x$.

APPLICATION 9

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} + \infty\right[$ par :

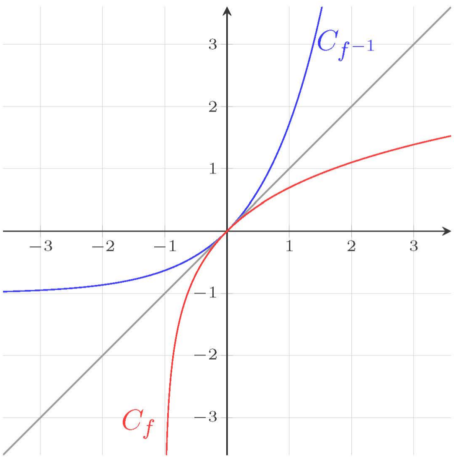
$$f(x) = \sqrt{2x-1}$$

1. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproques sur un intervalle $\mathbb{J}$ à déterminé.
2. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de $\mathbb{J}$ (f^{-1} est la fonction réciproques de f).

PROPRIÉTÉ 2

Si f une fonction numérique continue et strictement monotone sur un intervalle $\mathbb{I}$, et f^{-1} sa fonction réciproque, alors :

- f^{-1} continue sur l'intervalle $f(\mathbb{I})$.
- f^{-1} strictement monotone sur l'intervalle $f(\mathbb{I})$ et elle a la même monotonie de f sur l'intervalle $\mathbb{I}$.
- La courbe de la fonction f^{-1} est le symétrique de la courbe de fonction f par apport à droite de l'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.



9-FONCTION RACINE N-IÈME

Activité

Soient f est une fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = n^n\ ;\ n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} sur $[0, +\infty[$.
2. Que déduire pour la continuité et la monotonie de la fonction f^{-1} ?

DÉfiNITION 6

Soit n un nombre naturel non nul.
La fonction réciproque de la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f : x \longmapsto x^n$ est appelée la fonction racine n-ième, et on note $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

- On note par $\sqrt[n]{x}$ l'image de x par cette fonction.
- Le nombre $\sqrt[n]{x}$ est appelé la racine n-ième du nombre x.

POPOSITION 5

- La fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
- Dans un repère orthonormé, la courbe de la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est le symétrique de la courbe de la fonction $x \longmapsto x^n$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque

- $(\forall a \in \mathbb{R}^+)$; $(\forall b \in \mathbb{R}^+)$; $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$.
- $(\forall a \in \mathbb{R}^+)$; $(\forall b \in \mathbb{R}^+)$; $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a > b$.
- $(\forall a \in \mathbb{R}^+)$; $(\sqrt[n]{a})^n = a$ et $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Exemple

Réoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) : \sqrt[5]{9x - 4} = 2$$

l'équation est définie, si $9x - 4 \geq 0$ càd $x \geq \frac{4}{9}$.
Alors

$$\sqrt[5]{9x-4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 4 = 2^5 \\ x \geq \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 4 = 32 \\ x \geq \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x \geq \frac{4}{9} \end{cases}$$

Alors l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{4\}$

DÉfiNITION 7

Soit x est un nombre naturel strictement positif et r un nombre rationnel non nul.

On appelle puissance rationnelle du nombre x qui a la puissance r le nombre x^r défini par :

$$x^r = n\sqrt{x^m}$$

tel que

$$r = \frac{m}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \ , \ m \in \mathbb{Z}^*.$$

Résultats

- $(\forall r \in \mathbb{R}^*)$; $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $x^r > 0$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$; $(\forall m \in \mathbb{Z}^*)$; $n\sqrt{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$.