filali jaouad

# Fonctions primitives
# 2bac sm

## *Définition*

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.

On a dira que la fonction $F$, définie sur I, est « une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle I » si on a :

$\forall x \in \mathrm{I},\ F'(x) = f(x)$

## *Propriété fondamentale*

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.

**Si** $f$ admet une primitive $F$ sur I **alors** $f$ admet une infinité de primitives sur I et elles sont de la forme :

$F + k$ où $k$ est une constante réelle quelconque.
En d'autres termes, toute primitive $G$ de la fonction $f$ sur l'intervalle I est définie par :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ G(x) = F(x) + k$$

## *Une condition suffisante d'existence de primitives*

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.

**Si** $f$ est continue sur I **alors** $f$ admet des primitives sur I.

## *Primitive prenant une valeur particulière en un point*

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I. Soit $x_0$ un élément de I et $y_0$ un réel.

**Si** $f$ admet des primitives sur I **alors** il en existe une seule, $F$, telle que : $F(x_0) = y_0$.

# Calcul de primitives

## *Propriétés (linéarité)*

Soit $f$ et g deux fonctions définies sur un intervalle I et soit $\alpha$ un réel.

- **Si** $F$ est une primitive de $f$ sur I **alors** $\alpha F$ est une primitive de $\alpha f$ sur I ;
- **Si** $F$ et $G$ sont des primitives respectivement de $f$ et $g$ sur $I$ **alors** $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

## *Fonctions usuelles*

| *la fonction $f$* | *les primitives de $f$* | *intervalle* |
|---|---|---|
| $x \mapsto k,\ k \in \mathbb{R}$ | $x \mapsto kx + c,\ c \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$ | $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ | $x \mapsto -\frac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ | $x \mapsto -\frac{1}{n-1}.\frac{1}{x^{n-1}} + c,\ c \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $x \mapsto 2\sqrt{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$ | $]0, +\infty[$ |

| *la fonction $f$* | *les primitives de $f$* | *intervalle* |
|---|---|---|
| $x \mapsto x^r,\ r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$ | $x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$ | $]0, +\infty[$ |
| $x \mapsto \cos(x)$ | $x \mapsto \sin(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \sin(x)$ | $x \mapsto -\cos(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ | $x \mapsto \tan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ | $x \mapsto \arctan(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |

## Formulaire

Pour toute fonction *u* définie et dérivable sur un intervalle I (et, pour la deuxième situation, prenant des valeurs strictement positives sur I), on a

| $f$ | $F$ |
|---|---|
| $x \mapsto u'(x)u^n(x)$ | $x \mapsto \frac{1}{n+1}\left(u(x)\right)^{n+1}$ |
| $x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ | $x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$ |

( n différent de -1 )

***Tableau des primitives et les opérations*** **.**

| *la fonction $f$ définie sur I* | *une primitive de $f$ sur I* | *conditions* |
|---|---|---|
| $u' + v'$ | $u + v$ | |
| $u'v + v'u$ | $uv$ | |
| $\dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ | $\dfrac{u}{v}$ | $v \neq 0$ sur $I$ |
| $u'u^n,\ n \in \mathbb{N}^*$ | $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ | |
| $\dfrac{u'}{u^2}$ | $-\dfrac{1}{u}$ | $u \neq 0$ sur $I$ |
| $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ | $u > 0$ sur $I$ |
| $\dfrac{u'}{(\sqrt[n]{u})^{n-1}},\ n \in \mathbb{N}^*$ | $n\sqrt[n]{u}$ | $u > 0$ sur $I$ |
| $u'u^r,\ r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$ | $\dfrac{x^{r+1}}{r+1} + c$ | $u > 0$ sur $I$ |
| $x \mapsto u'(ax+b),\ a \in \mathbb{R}^*\ et\ a \in \mathbb{R}$ | $x \mapsto \dfrac{1}{a}u(ax+b)$ | $]0, +\infty[$ |
| $\dfrac{u'}{1+u^2}$ | $\arctan(u)$ | |
| $u' \sin(u)$ | $-\cos(u)$ | |
| $u' \cos(u)$ | $\sin(u)$ | |
| $\dfrac{u'}{\cos^2(u)}$ | $\tan(u)$ | $u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi; \forall k \in \mathbb{Z}$ |