Fonctions numériques

I) Généralités

1) Fonctions numériques d'une variable réelle

a) Définition

Une fonction numérique f (d'une variable réelle) est une relation qui permet d'associer à chaque réel x un nombre réel au plus y que l'on note y= f(x)

- *Le réel $f(x)$ s'appelle **image** de x par la fonction f*
- *Le réel x s'appelle **antécédent** de y par la fonction f*

On écrit $f : x \to f(x)$ On lit aussi : la fonction f qui à x associe $f(x)$

b) Exemples

Exp1 : Fonctions affines

$f : x \to 2x-1$; $g(x) = 3x+4$

On a : $f(2) = 2.2-1 = 3$ *3 est l'image de 2 par f*

2 est un antécédent de 3 par f

$g(-3) = 3.(-3)+4 = -5$ *- 5 est l'image de -3 par f*

Exp2 : $h(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

$h(2) = \dfrac{2.2+1}{2-1} = 5$; *5 est l'image de 2 par h*

2 est un antécédent de 5 par f

$h(1) = \dfrac{2.1+1}{1-1} = \dfrac{3}{0}$ *ce qui est impossible*

On dit alors le nombre 1 n'admet pas d'image par h

Pour pouvoir calculer h(x) il faut que $x-1 \neq 0$ c'est à dire $x \neq 1$

donc pour la fonction h : le seul nombre réel qui n'a pas d'image est 1 c'est-à-dire l'ensemble des réels qui ont une image par h est l'ensembles des tous les réels différents de 1 et on le note

$D_h = \mathbb{R} - \{1\}$ *ou encore* $D_h =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

*L'ensemble D_h s'appelle **ensemble (domaine)de définition de h***

c) Ensemble de définition d'une fonction :

- **Définition :** *f étant une fonction numérique à variable réelle, l'ensemble des nombres réels qui admettent une image par f est appelé ensemble (ou domaine) de définition de f noté souvent par D_f ou D*

On a ainsi $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}\}$

Ou encore $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$

- **Exemples :** *déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes en les écrivant sous forme d'intervalles ou de réunion d'un intervalles .*

$f(x) = 2x-5$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$; $h(x) = x^2 - 3x$; $l(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x}$

- $f(x)$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *c'est à dire tous les nombres réels ont une image par f donc* $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
- $D_g = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$

  $D_g = \mathbb{R}^*$ *ou* $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ *ou* $D_g =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
- $h(x)$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *pour tout x de* $\mathbb{R}$ *c'est à dire tous les nombres réels ont une image par h donc* $D_h = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
- $D_l = \{x \in \mathbb{R} / l(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x \neq 0\}$

  $D_l = \{x \in \mathbb{R} / x(x-3) \neq 0\}$

  $D_l = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x \neq 3\}$

  $D_l = \mathbb{R} - \{0,3\} =]-\infty, 0[\cup]0, 3[\cup]3, +\infty[$

- **Exercices :** *déterminer le domaine de définition de chacune des*

d) Représentation graphique d'une fonction

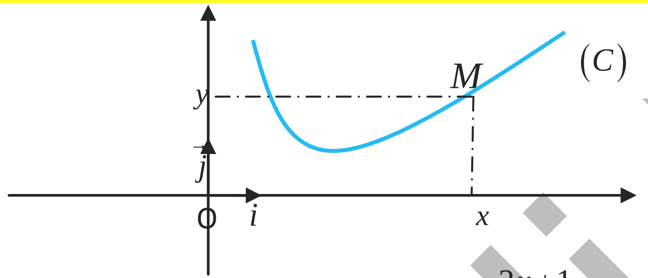
- **Définition :** Le plan (P) étant rapporté à un repère ,
  f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition
  L'ensembles des points $M(x, f(x))$ du plan où $x \in D_f$
  s appelle **courbe représentative** de f dans le repère

On la note souvent par (C) ou (C_f)

et on écrit $(C_f) = \{M_{(x,f(x))} \in (P) / x \in D_f\}$

Ou encore $(C_f) = \{M_{(x,y)} \in (P) / x \in D_f \text{ et } y = f(x)\}$

- **Remarque :** $M(x, y) \in (C_f)$ signifie $x \in D_f$ et $y = f(x)$



- **Exemple :** Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+6}$
  et (C_f) sa courbe représentative dans le repère
  - Déterminer le domaine de définition de f
  - Les points suivants appartiennent- ils à (C_f) ? justifier

$$A\left(-1, -\frac{1}{3}\right) \; ; \; B(-2, 0) \; ; \; E(1,1) \; ; \; G\left(-3, \frac{5}{3}\right) \; ; \; H\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

- **Cas particulier :** La représentation graphique d'une fonction affine f tel que $f(x) = ax + b$ est la droite d'équation $y = ax + b$

2) Egalité de deux fonctions

- **Définition :** On dit que deux fonctions f et g sont **égales** si et seulement si elles ont même ensemble de définition D et pour tout x de D on $f(x) = g(x)$
  et on écrit $f = g$

- **Exemples :** Comparer f et g dans chacun des cas

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = x$ b) $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = |x|$

c) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$; $g(x) = x$ d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $g(x) = \sqrt{x-1}.\sqrt{x+1}$

- **Correction :**

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$; $g(x) = x$

$D_f = \mathbb{R}$ car $x^2 \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$ donc $D_f = D_g$

$f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ et $g(x) = x$ $|x|$ n'est égale à x que $x \geq 0$

Or on a $f(-1) = 1$ et $g(-1) = -1$ donc $f \neq g$

b) on a $D_f = D_g$ et on a $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = g(x)$

donc $f(x) = g(x)$ pour tout x de D_f donc $f = g$

c) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0, +\infty[$

$g(x) = x$ $D_f = \mathbb{R}$ puisque $D_f \neq D_g$ alors $f \neq g$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \geq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 1\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |x| \geq 1\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$

$D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

$g(x) = \sqrt{x-1}.\sqrt{x+1}$

$D = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R}\}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \geq 0 \text{ et } x + 1 \geq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1 \text{ et } x \geq -1\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$

$D_f = [1, +\infty[$

Puisque $D_f \neq D_g$ alors $f \neq g$

• **Correction de l'Exercice :** détermir
chacune des fonctions suivantes e
d'intervalles ou de réunion d'inter

Exercice1 : déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes en les écrivant sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles .

$$f(x)=\sqrt{3x^2-5x+2}\ ;\quad g(x)=\frac{x-3}{|x|+1}\ ;\ h(x)=\frac{\sqrt{2x^2-3x}}{x^2-4}\ ;$$

$$l(x)=\sqrt{2|x|-3}\ ;\ u(x)=\sqrt{\frac{2x-3}{x+3}}\quad ;\ v(x)=\frac{\sqrt{3-2|x|}}{x}$$

3) fonctions paires et fonction impaires :

a) Exemples :

*** Exp1** Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2-3$

On a $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=(-x)^2-3=x^2-3=f(x)$

c'est-à-dire $f(-x)=f(x)$

on dit alors f est une fonction paire

*** Exp2** Soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{-3}{x}$

On a $D_g=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\}=\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

- Pour tout x de $\mathbb{R}^*$ on a $-x\in\mathbb{R}^*$
- $g(-x)=\frac{-3}{-x}=-\frac{-3}{x}=-g(x)$

c'est-à-dire $g(-x)=-g(x)$

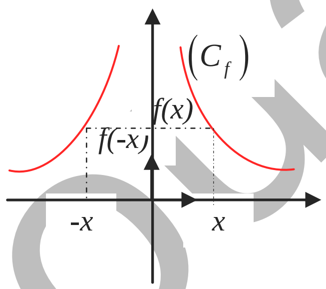
on dit alors g est une fonction impaire

b) Définition:

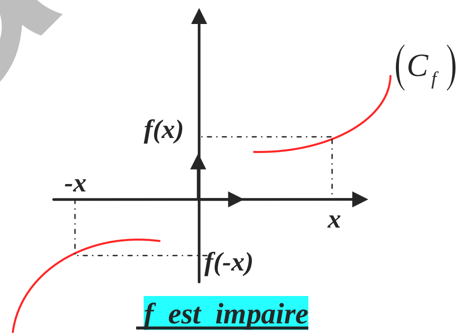
f étant une fonction numérique et D_f son ensemble de définition

*1 Dire que f est une fonction **paire** signifie que
Pour tout x de D_f on a $-x\in D_f$ et $f(-x)=f(x)$

*2 Dire que f est une fonction **impaire** signifie que
Pour tout x de D_f on a $-x\in D_f$ et $f(-x)=-f(x)$



f est paire



f est impaire

c) Remarque :

f étant une fonction numérique et (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

*1 f est paire si et seulement si (C_f) est symétrique par rapport à **l'axe des ordonnées**.

*2 f est impaire si et seulement si (C_f) est symétrique par rapport à **l'origine O du repère.**

d) Exercice:

Etudier la parité des fonctions suivantes
(c'est-à-dire si f est paire ou impaire ou ni paire ni impaire)

$$f(x)=2x^2-\sqrt{5}\ ;\ g(x)=2x^3-3x\ ;\ h(x)=3x+2$$

$$u(x)=\frac{3x}{x^2-1}\ ;\quad v(x)=\sqrt{x-3}\ ;\ w(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$t(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+x}\ ;\ l(x)=\frac{2x}{|x-1|-|x+1|}$$

variation d'une fonction TC

II) ***Sens de variation d'une fonction***

1) fonction croissante , fonction décroissante , fonction monotone

a) Définition1

f étant une fonction numérique définie sur D et I un intervalle contenu dans D

*1 Dire que f est **croissante** sur I signifie que pour tout α et β de I Si $\alpha<\beta$ alors $f(\alpha)\le f(\beta)$

*2 Dire que f est **strictement croissante** sur I signifie que pour tout α et β de I Si $\alpha<\beta$ alors $f(\alpha)<f(\beta)$

*3 Dire que f est **décroissante** sur I signifie que pour tout α et β de I Si $\alpha<\beta$ alors $f(\alpha)\ge f(\beta)$

*4 Dire que f est **strictement décroissante** sur I signifie que pour tout α et β de I Si $\alpha<\beta$ alors $f(\alpha)>f(\beta)$

*5 Dire que f est **constante** sur I signifie que pour α et β de I $f(\alpha)=f(\beta)$

b) Exemples

Exp1 : Soit f la fonction définie par $f(x)=2x-1$ $D_f=\mathbb{R}$

Montrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Soient α et β **de** $\mathbb{R}$ **tel que** $\alpha<\beta$

Donc $2\alpha<2\beta$ alors $2\alpha-1<2\beta-1$ c. à . d $f(\alpha)<f(\beta)$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exp2 : $g(x)=-2x+5$ $D_f=\mathbb{R}$

Montrons que est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Soient α et β **de** $\mathbb{R}$ **tel que** $\alpha<\beta$

Donc $-2\alpha<-2\beta$ alors $-2\alpha+5<-2\beta+5$ c. à . d $g(\alpha)>g(\beta)$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Exp 3 : Soit h la fonction définie par $f(x)=2x^2-7$ $D_f=\mathbb{R}$

Montrer que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que h strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

* Montrons que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

Soient α et β **de** $\mathbb{R}^+$ **tel que** $\alpha<\beta$ α et β sont positifs

alors $\alpha^2<\beta^2$ alors $2\alpha^2<2\beta^2$ c. à . d $2\alpha^2-7<2\beta^2-7$

c.à.d. $h(\alpha)<h(\beta)$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

* Montrons que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

Soient α et β **de** $\mathbb{R}^-$ **tel que** $\alpha<\beta$ α et β sont négatifs

alors $\alpha^2>\beta^2$ alors $2\alpha^2>2\beta^2$ c. à . d $2\alpha^2-7>2\beta^2-7$

c.à.d. $h(\alpha)>h(\beta)$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

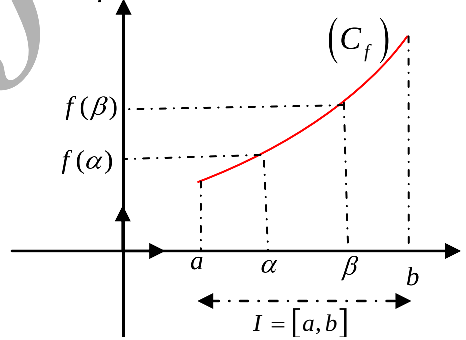
On résume ce résultat dans un tableau appelé **tableau de variation de h**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	$h(0)=-7$	$\nearrow$

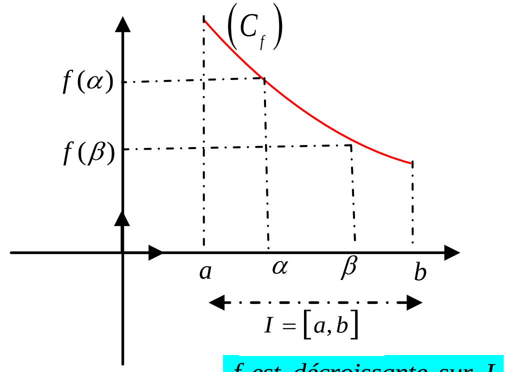
b)Définition2 f étant une fonction numérique définie sur D et I un intervalle contenu dans D

*1 Dire que f est **monotone** sur I signifie que f est croissante sur I ou f est décroissante sur I

*1 Dire que f est **strictement monotone** sur I signifie que f est strictement croissante sur I ou f est strictement décroissante sur I



f est croissante sur I



f est décroissante sur I

Exercice : Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2-2x$. Montrer que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty,1]$

2) Taux de variation d'une fonction et monotonie d'une fonction

a) Définition : f étant une fonction numérique , D_f son ensemble de définition α et β sont deux éléments distincts de D_f . $(\alpha \neq \beta)$

Le nombre réel $T_{(\alpha,\beta)} = \dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$

s'appelle **taux de variation de f entre** α **et** β

Exp1 : Soit f la fonction définie par $f(x)=2x-1$ $D_f = \mathbb{R}$

α et β sont deux éléments distincts de D_f .

Calculer $T_{(\alpha,\beta)} = \dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ Réponse $T_{(\alpha,\beta)} = 2$

Exp2 : $g(x) = x^2 + 2x + 3$ $D_f = \mathbb{R}$

α et β sont deux éléments distincts de D_f .

Calculer $T_{(\alpha,\beta)} = \dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ Réponse $T_{(\alpha,\beta)} = \alpha+\beta+2$

Exp 3 : Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{2x-1}{3x-2}$ $D_f = \mathbb{R}$

a) Détermine D_f le domaine de définition de h

b) α et β s ont deux éléments distincts de D_h .

Calculer $T_{(\alpha,\beta)} = \dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ Réponse $T_{(\alpha,\beta)} = \dfrac{-1}{(3\alpha-2)(3\beta-2)}$

b) propriété : f étant une fonction numérique définie sur un intervalle I

$T_{(\alpha,\beta)} = \dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ avec α et β deux éléments distincts de I $(\alpha \neq \beta)$.

*1 f est croissante sur I si et seulement si pour tout α et β de I on a $T_{(\alpha,\beta)} \geq 0$

*2 f est décroissante sur I si et seulement si pour tout α et β de I on a $T_{(\alpha,\beta)} \leq 0$

Exp1 : Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$

Montrer que f est croissante sur $[-1,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty,-1]$

et dresser son tableau de variation

Exp2 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-4}$

Montrer que f est croissante sur $[2,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty,2]$

et dresser son tableau de variation

Correction :

Exp 1 $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$ $D_f = \mathbb{R}$ car f(x) existe pour tout x de $\mathbb{R}$

α et β sont deux éléments distincts de $\mathbb{R}$. $(\alpha \neq \beta)$

Calculons $T_{(\alpha,\beta)} = \dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} = \dfrac{(2\alpha^2+4\alpha-5)-(2\beta^2+4b-5)}{\alpha-\beta}$

$$T_{(\alpha,\beta)} = \frac{2\alpha^2+4\alpha-5-2\beta^2-4b+5}{\alpha-\beta} = \frac{2(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+4(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}$$

$$T_{(\alpha,\beta)} = \frac{(\alpha-\beta)[2(\alpha+\beta)+4]}{\alpha-\beta} = 2(\alpha+\beta)+4$$

Etudions le signe de $T_{(\alpha,\beta)}$ sur $[-1,+\infty[$ et sur $]-\infty,-1]$

Sur $[-1,+\infty[$ on a $\alpha \geq -1$ et $\beta \geq -1$ donc $\alpha+\beta \geq -2$ donc $2(\alpha+\beta) \geq -4$

c.à.d. $2(\alpha+\beta)+4 \geq 0$ donc $T_{(\alpha,\beta)} \leq 0$

donc f est croissante sur $[-1,+\infty[$

Sur $]-\infty,-1]$ on a $\alpha \leq -1$ et $\beta \leq -1$ donc $\alpha+\beta \leq -2$ donc $2(\alpha+\beta) \leq -4$

c.à.d. $2(\alpha+\beta)+4 \leq 0$ donc $T_{(\alpha,\beta)} \leq 0$

donc f est décroissante sur $]-\infty,-1]$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	↘	$f(-1)=-7$	↗

Correction :

Exp 2 $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-4}$ $\quad D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-4\neq 0\}=\mathbb{R}-\{2\}=\left]-\infty,2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

α et β sont deux éléments distincts de D_f. $\quad(\alpha\neq\beta)$

$$T_{(\alpha,\beta)}=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{\dfrac{3\alpha+2}{2\alpha-4}-\dfrac{3\beta+2}{2\beta-4}}{\alpha-\beta}=\frac{\dfrac{-16(\alpha-\beta)}{(2\alpha-4)(2\beta-4)}}{\alpha-\beta}$$

$$T_{(\alpha,\beta)}=\frac{-16}{(2\alpha-4)(2\beta-4)}$$

Etudions le signe de $T_{(\alpha,\beta)}$ sur $\left]2,+\infty\right[$ et sur $\left]-\infty,2\right[$

Sur $\left]2,+\infty\right[$ on a $\alpha>2$ et $\beta>2$ donc $2\alpha>4$ et $2\beta>4$

donc $2\alpha-4>0$ et $2\beta-4>0$ c.a.d $(2\alpha-4).(2\beta-4)>0$

donc $\dfrac{-16}{(2\alpha-4)(2\beta-4)}<0$ donc $T_{(\alpha,\beta)}\leq 0$

donc f est dé croissante sur $\left]2,+\infty\right[$

Sur $\left]-\infty,2\right[$ on a $\alpha<2$ et $\beta<2$ donc $2\alpha<4$ et $2\beta<4$

donc $2\alpha-4<0$ et $2\beta-4<0$ c.a.d $(2\alpha-4).(2\beta-4)>0$

donc $\dfrac{-16}{(2\alpha-4)(2\beta-4)}<0$ donc $T_{(\alpha,\beta)}\leq 0$

donc f est dé croissante sur $\left]2,+\infty\right[$

c .a.d f est décroissante sur chacun des intervalles $\left]2,+\infty\right[$ et $\left]-\infty,2\right[$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f(x)	↘	‖	↘

c) Variation et parité :

Propriété: f étant une fonction définie Sur D

et I un intervalle de D inclus dans $\mathbb{R}^+$ c.à.d. $I\subset D\cap R^+$

Soit I' le symétrique de I

c .à.d I' est l'ensemble des opposés des éléments de I

*1 cas de f une fonction paire

-- si f est croissante sur I alors elle est décroissante sur I'

-- si f est décroissante sur I alors elle est croissante sur I'

*2 cas de f une fonction impaire

-- si f est croissante sur I alors elle est aussi croissante sur I'

-- si f est décroissante sur I alors elle est aussi décroissante sur I'

Exercice : Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3-3x$

a) Déterminer D_f et montrer que f est impaire

b) Montrer que f est croissante sur $\left[1,+\infty\right[$ et décroissante sur $[0,1]$

c) En déduire le variations de f sur $\left]-\infty,-1\right]$ et $[-1,0]$

et dresser le tableau de variation de f

Correction : $f(x)=x^3-3x$

a) $D_f=\mathbb{R}$ car f(x) existe pour tout x de $\mathbb{R}$

On a $D_f=\mathbb{R}$ donc symétrique par rapport à 0

pour tout x de $\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$ et $f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x$

donc $f(-x)=-f(x)$ c . à .d f est impaire

b) $f(x)=x^3-3x$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

α et β sont deux éléments distincts de $\mathbb{R}$. $\quad(\alpha\neq\beta)$

Calculons

$$T_{(\alpha,\beta)}=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha^3-3\alpha)-(\beta^3-3\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^3-3\alpha-\beta^3+3\beta}{\alpha-\beta}$$

$$T_{(\alpha,\beta)}=\frac{\alpha^3-\beta^3-3(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-3)}{\alpha-\beta}$$

$T_{(\alpha,\beta)}=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-3$ $\qquad$ rappel $a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$

Etudions le signe du taux de variation $T_{(\alpha,\beta)}=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-3$

Sur $[1,+\infty[$ on a $\alpha\geq 1$ et $\beta\geq 1$

donc $\alpha^2\geq 1$ et $\beta^2\geq 1$ et $\alpha\beta\geq 1$ en faisant la somme membre à membre

On obtient alors $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\geq 3$ c.a.d $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-3\geq 0$

donc $T_{(\alpha,\beta)}\geq 0$ c.à.d. f est croissante sur $[1,+\infty[$

Sur $[0,1]$ on a $0\leq\alpha\leq 1$ et $0\leq\beta\leq 1$

donc $0\leq\alpha^2\leq 1$ et $0\leq\beta^2\leq 1$ et $0\leq\alpha\beta\leq 1$ et en faisant la somme

On obtient alors $0\leq\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\leq 3$ c.à.d $\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-3\leq 0$

donc $T_{(\alpha,\beta)}\leq 0$ c.à.d. f est décroissante sur $[0,1]$

Conclusion : f est croissante sur $[1,+\infty[$ et décroissante sur $[0,1]$

c) On a montré que f est impaire dans a)

et puisque f est croissante sur $[1,+\infty[$ alors

elle est aussi croissante sur l' intervalle opposé c.à.d sur. $]-\infty,-1]$

et puisque f est décroissante sur $[0,1]$ alors

elle est aussi décroissante sur l' intervalle opposé c.à.d. sur $[-1,0]$

Tableau u de variation de f

$f(-1)=2$; $f(0)=0$; $f(1)=-2$;

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f(x)		↗	2	↘	0	↘	-2	↗	

3) Maximum d'une fonction Minimum d'une fonction, Extremum

a) Définition : f étant une fonction définie Sur D et I un intervalle de D et a et b deux éléments de I

*1 Dire que $f(a)$ est un maximum de f sur I signifie que pour tout x de I $f(x)\leq f(a)$

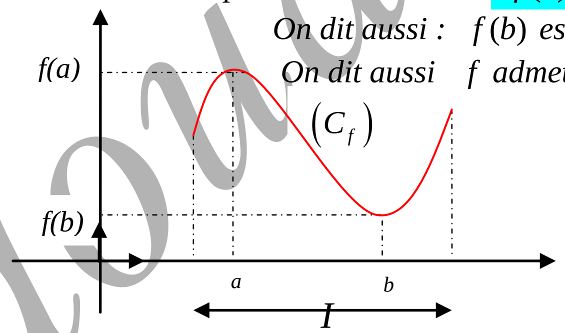
On dit aussi : $f(a)$ es la valeur maximale de f sur I

On dit aussi f admet un maximum en a qui est $f(a)$

*2 Dire que $f(b)$ est un minimum de f sur I signifie que pour tout x de I $f(b)\leq f(x)$

On dit aussi : $f(b)$ es la valeur minimale de f sur I

On dit aussi f admet un minimum en b qui est $f(b)$



Le maximum ou le minimum de f sur I s'appelle extremum de f sur I

b) **Remarque:** f étant une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ $a<b$

et c un élément de $]a,b[$ c.à.d. $a<c<b$

*1 Si f est croissante sur $[a,c]$ et décroissante sur $[c,b]$

alors $f(c)$ est un maximum de f sur $[a,b]$ Voir tableau ci-dessous

*1 Si f est croissante sur $[a,c]$ et décroissante sur $[c,b]$

alors $f(c)$ est un minimum de f sur $[a,b]$ Voir tableau ci-dessous

x	a		c		b
f(x)		↗	f(c)	↘	

$f(c)$ est un maximum de f sur $[a,b]$

x	a		c		b
f(x)		↘	f(c)	↗	

$f(c)$ est un minimum de f sur $[a,b]$

Correction de l'exercice dans paragraphe 1) d) sur les variations

Exercice : Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2-2x$. Montrer que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty,1]$

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2-2x$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

* Montrons que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

Soient α et β **de** $[1,+\infty[$ **tel que** $\alpha<\beta$ et montrons que $f(\alpha)<f(\beta)$

$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha^2-2\alpha)-(\beta^2-2\beta)=\alpha^2-\beta^2-2(\alpha-\beta)$

$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2)$

or on a $\alpha<\beta$ donc $\alpha-\beta<0$

et on a $\alpha\geq1$ et $\beta\geq1$ donc $\alpha+\beta>2$ car $\alpha<\beta$

donc $\alpha+\beta-2>0$

et par suite $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2)<0$ donc $f(\alpha)-f(\beta)<0$

c.à.d $f(\alpha)<f(\beta)$ donc **<u>f est strictement croissante sur</u>** $[1,+\infty[$

* Montrons que f est strictement décroissante sur $]-\infty,1]$

Soient α et β **de** $]-\infty,1]$ **tel que** $\alpha<\beta$ et montrons que $f(\alpha)>f(\beta)$

$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha^2-2\alpha)-(\beta^2-2\beta)=\alpha^2-\beta^2-2(\alpha-\beta)$

$f(\alpha)-f(\beta)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2)$

or on a $\alpha<\beta$ donc $\alpha-\beta<0$

et on a $\alpha\leq1$ et $\beta\leq1$ donc $\alpha+\beta<2$ car $\alpha<\beta$

donc $\alpha+\beta-2<0$

et par suite $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-2)>0$ donc $f(\alpha)-f(\beta)>0$

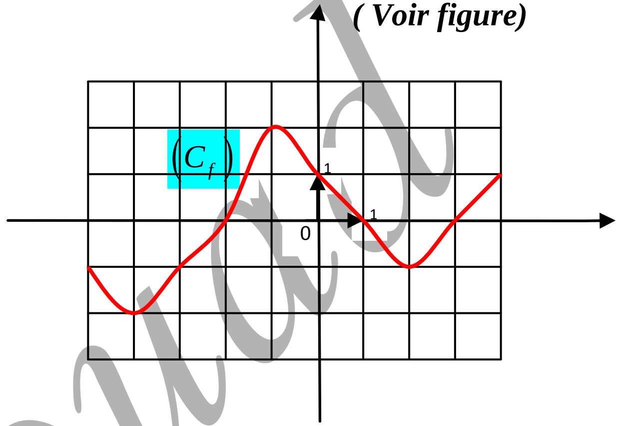
c.à.d $f(\alpha)>f(\beta)$ **<u>donc f est strictement décroissante sur</u>** $]-\infty,1]$

On résume ce résultat dans un tableau appelé **<u>tableau de variation de h</u>**

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f(1)=-1$	$\nearrow$

Exercice :

Soit f la fonction numérique définie graphiquement par **(Voir figure)**



Répondre graphiquement aux questions suivantes

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Déterminer $f(-5)$; $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$; $f(4)$
3) Déterminer les antécédents des nombres 2 , 1 ,0 , -1 ,-2 -3 , 4 s'ils existent .
4) Résoudre l'équation $f(x)=0$
5) Résoudre l'équation $f(x)=2$
6) Résoudre l'inéquation $f(x)<0$ et en déduire le tableau de signe de f(x)
7) Dresser le tableau de variation de f .
8) Représenter dans le même repère et avec une autre couleur la fonction g définie par $g(x)=-f(x)$.
9) Question facultative
   Représenter dans le même repère et avec une autre couleur la fonction h définie par $h(x)=|f(x)|$.