Nombres complexes

Histoire

/' L'ensemble de nombres le plus simple est celui de nombres entiers naturels, noté $\mathbb{N}$ et qui contient les nombres que vous connaissez depuis longtemps : 0 ; 1 ; 2 ; 3...

  _' Quel est le nombre entier naturel qui ajouté à 7 donne 12 ?

  `' Quel est le nombre entier naturel qui ajouté à 12 donne 7 ?

0' L'exemple précédent montre que l'ensemble $\mathbb{N}$ est « insuffisant » car certaines équations simples n'y trouvent pas de solution. On peut alors utiliser l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, et qui contient $\mathbb{N}$ et les opposés des entiers naturels (par exemple : -3 ; -2).

  _' Résoudre dans $\mathbb{N}$ puis dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $2x + 8 = 0$.

  `' Même question avec l'équation : $2x + 7 = 0$.

1' De nouveau l'ensemble $\mathbb{Z}$ est en quelque sorte insuffisant pour exprimer les solutions de certaines équations.

  _' De quel autre ensemble de nombres a-t-on au minimum besoin pour que l'équation du $2x + 7 = 0$ ait une solution ?

  `' Dans ce nouvel ensemble quelles sont les solutions de l'équation : $9x^2 = 16$?

  a' Décrire l'ensemble de nombres dont on a besoin au minimum pour que l'équation précé-dente ait une solution. On notera $\mathbb{Q}$ cet ensemble.

2' Modifier l'équation précédente pour qu'elle n'admette pas de solution dans l'ensemble des rationnels. Dans quel ensemble faut-il travailler pour pouvoir dire qu'elle a deux solutions ?

3' Que pouvez-vous dire de l'équation $x^2 + 1 = 0$ en terme de solutions dans les ensembles de nombres précédents ?

4' Compléter le schéma commencé ci-dessous, qui montre les inclusions successives des ensembles de nombres en donnant à chaque fois une équation qui n'a pas de solution dans l'ensemble, mais en a une dans le suivant.

I. Forme algébrique et représentation d'un nombre complexe

1. Définition & vocabulaire

THÉORÈME

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels ;
- il contient un nombre i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$;
- il est muni d'une **addition et d'une multiplication** qui ont les **mêmes propriétés que dans** $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

Exemples

- Les nombres -1 ; 0 ; $3/4$; $\sqrt{2}$ sont des nombres réels donc ce sont aussi des éléments de $\mathbb{C}$.
- À l'aide du nombre i et de la multiplication : $-\mathrm{i}$; $2\mathrm{i}$; $\mathrm{i}\sqrt{2}$... sont aussi dans $\mathbb{C}$.
- Avec les additions, les nombres suivants sont aussi dans $\mathbb{C}$: $-1 + \mathrm{i}$; $\sqrt{2}$+2i

DÉFINITION

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme : $z = a + \mathrm{i}b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Cette écriture est appelée **forme algébrique de** z :

- a est appelée **partie réelle** de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
- b est appelée **partie imaginaire** de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

REMARQUES :

- Lorsque $\mathrm{Im}(z) = 0$, $z = a$ est réel.
- Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$, $z = \mathrm{i}b$ est appelé **imaginaire pur**.

Exercice d'application Soient $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$, $z_2 = -1 + \mathrm{i}$, des nombres complexes. Déterminer les parties réelles et imaginaires des complexes : $z_3 = z_1 \times z_2$, $z_4 = z_1^2$.

Correction $z_3 = (1 + 2\mathrm{i})(-1 + \mathrm{i}) = -1 + \mathrm{i} - 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 = -1 - \mathrm{i} - 2 = -3 - \mathrm{i}$.

Donc $\mathrm{Re}(z_3) = -3$ et $\mathrm{Im}(z_3) = -1$.

$z_4 = (1 + 2\mathrm{i})^2 = 1 + 4\mathrm{i} + (2\mathrm{i})^2 = 1 + 4\mathrm{i} - 4 = -3 + 4\mathrm{i}$. Donc $\mathrm{Re}(z_4) = -3$ et $\mathrm{Im}(z_4) = 4$.

THÉORÈME

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes :

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

L' écriture algébrique d'un nombre complexe est **unique**.

Exemple Soit $z = 2x - 1 + \mathrm{i}(3 - y)$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, un complexe.

On a $z = 0$ si et seulement si $2x - 1 = 0$ et $3 - y = 0$ c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = 3$.

2. Représentation graphique des complexes

Le plan est muni d'un repère **orthonormé direct** : $\left(O\,;\,\overrightarrow{OU}\,,\,\overrightarrow{OV}\right) = (O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

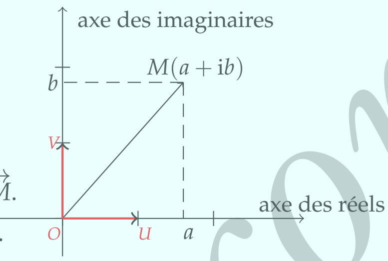
DÉFINITION

Tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ peut être représenté dans ce repère par :

- un unique point : $M\,(a\,;\,b)$, appelé **image ponctuelle** de $z = a + ib$.
- un unique vecteur : $\overrightarrow{OM}\,(a\,;\,b)$ appelé **image vectorielle** de $z = a + ib$.

On dit que $z = a + ib$ est l'**affixe** du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On note souvent $M(z)$ ou $M(a + ib)$ et $\overrightarrow{OM}(z)$ ou $\overrightarrow{OM}(a + ib)$.

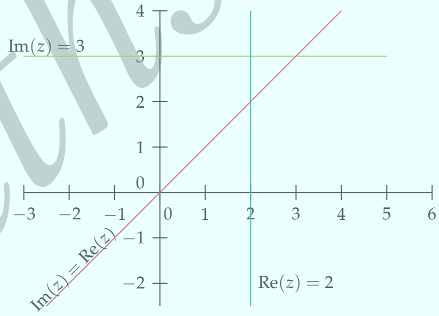


- Les complexes $z = a \in \mathbb{R}$ sont les nombres réels et sont représentés sur **l'axe des abscisses**.
- Les complexes $z = ib$, $b \in \mathbb{R}$ sont les **imaginaires purs** et sont représentés sur **l'axe des ordonnées**.
- Le plan est alors appelé **plan complexe**.

Exemple

Dans le plan complexe, on a représenté ci-contre les points d'affixe z tels que z=2+3i

- $\mathrm{Re}(z) = 2$
- $\mathrm{Im}(z) = 3$
- $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.



II. Addition, multiplication par un réel et géométrie

On se place dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

1. Addition

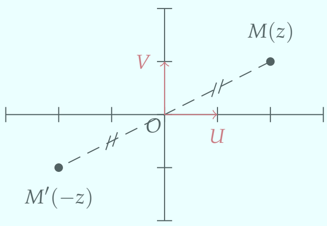
THÉORÈME

- Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{i}(b_1 + b_2)$.
- Si z_1 est l'affixe de $\overrightarrow{w_1}$ et z_2 celle de $\overrightarrow{w_2}$ alors $z_1 + z_2$ est l'affixe de $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$.

2. Opposé d'un nombre complexe

THÉORÈME

- L'opposé du nombre complexe $z = a + ib$ est : $-z = (-a) + \mathrm{i}(-b) = -a - ib$.
- z est l'affixe du point M. **L'opposé** de z noté $-z$ est l'affixe du **symétrique** de M par rapport à **l'origine**.
- si z est l'affixe de $\vec{w}$ alors $-z$ est l'affixe de $-\vec{w}$.



3. Soustraction

THÉORÈME

- Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + \mathrm{i}(b_1 - b_2)$.
- Si $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont d'affixes respectives z_1 et z_2 alors $\overrightarrow{w_1} - \overrightarrow{w_2}$ est d'affixe $z_1 - z_2$.
- Si A et B sont d'affixes z_A et z_B alors $z_B - z_A$ est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$.

Exercice d'application

On considère trois points A, B, C d'af-fixes : $z_A = -3+2i$, $z_B = 1+i$ et $z_C = 3-4i$.

1) Déterminer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2) Déterminer les coordonnées du centre de ce parallélogramme.

4. Multiplication d'un complexe par un réel

THÉORÈME

Soit $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{w}$ d'affixe z. Le complexe λz est l'affixe du vecteur $\lambda \overrightarrow{w}$.

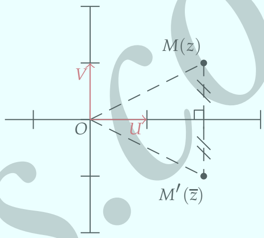
Exemple Soit A, B deux points du plan d'affixe $z_A = 3 - i$ et $z_B = -2+3i$. Le vecteur $2\overrightarrow{AB}$ a pour affixe : $2(z_B - z_A) = 2(-5+4i) = -10+8i$.

III. Inverse et quotient de nombres complexes

1. Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION

- Le **conjugué d'un nombre complexe** $z = a + ib$ est le complexe $\boldsymbol{a - ib}$, noté $\bar{z}$.
- Si z est l'affixe de M, $\bar{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des réels.



THÉORÈME

1) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$; $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.
2) z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3) z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

PREUVE

1) On écrit z sous sa forme algébrique $z = a + ib$ et on a donc $\overline{z} = a - ib$. On en déduit :

$$z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z).$$

La seconde partie se prouve de la même façon.

2) On a $\overline{z} = z \iff \overline{z} - z = 0 \iff 2i\,\mathrm{Im}(z) = 0$ ce qui équivaut à $z \in \mathbb{R}$.
3) Même méthode qu'au 2).

2. Inverse d'un nombre complexe

THÉORÈME

Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un nombre complexe z' tel que $zz' = 1$.

Ce nombre s'appelle l'inverse de z, noté $\frac{1}{z}$ et il est tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \times \overline{z}}.$$

Si $z = a + ib \neq 0$ alors la forme algébrique de $\frac{1}{z}$ est : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$.

Exemple Dans la pratique, on effectue une multiplication par le conjugué du dénominateur pour se ramener à un dénominateur réel.

1) $z = 2i$. On a $\frac{1}{z} = \frac{1}{2i} = \frac{-2i}{2i \times (-2i)} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i$.
2) $z = \frac{1}{2+3i} = \frac{(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.

3. Quotient d'un nombre complexe

DÉFINITION

Soient z_1 et $z_2 \neq 0$ deux nombres complexes. On définit leur quotient par : $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2}$.

Exercice d'application Résoudre l'équation : $(1+\mathrm{i})z-2=3+2\mathrm{i}$.

Correction On procède comme pour les nombres réels en isolant l'inconnue z :

$$(1+\mathrm{i})z-2=3+2\mathrm{i} \Longleftrightarrow (1+\mathrm{i})z=5+2\mathrm{i} \Longleftrightarrow z=\frac{5+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(5+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{7-3\mathrm{i}}{2}.$$

L'unique solution est donc le nombre complexe : $z=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$.

4. Opérations avec les conjugués des nombres complexes

THÉORÈME

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

1) $\overline{\overline{z_1}}=z_1$

2) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

3) $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$

4) $\overline{z_1^n}=\left(\overline{z_1}\right)^n$, n entier naturel.

5) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2\neq 0$.

Exemple Démontrons que $S=(1+\mathrm{i})^5+(1-\mathrm{i})^5$ est un nombre réel.
On a $\overline{(1+i)^5}=(\overline{1+i})^5=(1-i)^5$. Donc $S=z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$ avec $z=(1+i)^5$. S est donc bien un nombre réel.

IV. Équations du second degré

THÉORÈME

Pour tout nombre réel non nul a, l'équation $z^2 = a$ admet deux racines dans $\mathbb{C}$:

- Si $a > 0$, les racines sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, les racines sont $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

EXEMPLES : Les solutions de : $z^2 = 16$ sont 4 et -4. Les solutions de $z^2 = -5$ dans $\mathbb{C}$ sont $\mathrm{i}\sqrt{5}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{5}$ (alors que cette équation n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$)

THÉORÈME

Soit $az^2 + bz + c = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution dans $\mathbb{R}$: $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- $\Delta < 0$, l'équation a deux solution dans $\mathbb{C}$ qui sont conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

. **REMARQUES :**

- Toute expression $Q(z) = az^2 + bz + c$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, se factorise dans $\mathbb{C}$ et :

$$Q(z) = az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

- $Q(z) = az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \dfrac{b}{a}z + \dfrac{c}{a}\right) = a\left(z^2 - Sz + P\right)$ avec : $S = z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $P = z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Exercice d'application

Résoudre l'équation : $z^2 - 2z + 3 = 0$.

Correction $z^2 - 2z + 3 = 0$.

le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8$. Le discriminant est strictement négatif, il y a donc deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z_1 = \dfrac{2 - \mathrm{i}\sqrt{8}}{2} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = \dfrac{2 + \mathrm{i}\sqrt{8}}{2} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{2}$
qui sont bien complexes conjuguées.

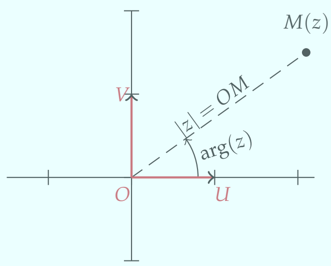
V. Module et argument d'un nombre complexe

1. Définition géométrique

DÉFINITION

Soit z un complexe. M (ou $\vec{w}$) un point (ou un vecteur) d'affixe z.

- On appelle **module** de z la distance OM (ou la norme $||\vec{w}||$). Le module de z est noté $|z|$.
- Si $z \neq 0$, on appelle **argument** de z une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ (ou $(\vec{u}, \vec{w})$).
  Un argument de z est noté $\arg(z)$.
- Le complexe nul n'a pas d'argument et a pour module 0.



REMARQUE :

$\arg(z)$ peut prendre une infinité de valeurs différentes : si θ est une mesure de $\arg(z)$ alors $\theta + k2\pi$ est une autre mesure de $\arg(z)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. On notera : $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$ et on dit que l'argument de z vaut θ « modulo 2π » ou « à 2π près ».

Exemples

- $|\mathrm{i}| = OV = 1$ et $\arg(\mathrm{i}) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OV}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
- Soit M_1 d'affixe -4 on a ; $|-4| = OM_1 = 4$ et $\arg(-4) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}\right) = \pi$.
- Soit M_2 d'affixe $1 + i$ on a :
  $|1 + \mathrm{i}| = OM_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ d'après la formule des distances
  $\arg(1 + \mathrm{i}) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ la diagonale du carré OUM_2V étant la bissectrice de $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$.

Déterminer un ensemble de points

Exercice d'application Déterminer dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1) $|z| = 3$

2) $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Correction

1) $|z| = 3 \iff OM = 3$.
Donc l'ensemble des points M tel que $|z| = 3$ est un cercle de centre O et de rayon 3.

2) $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \iff \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right) = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
Donc l'ensemble des points M tel que $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ est une demi-droite d'origine O, privé de O, de vecteur directeur $\vec{u_1}$ tel que $\left(\widehat{\vec{u},\vec{u_1}}\right) = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

2. Calcul algébrique du module et d'un argument

THÉORÈME

Soit $z = a + ib$ un complexe.

- $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Si $z \neq 0$ alors $\theta = \arg(z)$ peut être déterminé par : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$

Déterminer le module et un argument d'un nombre complexe

Exercice d'application

Déterminer le module et un argument du complexe $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Correction

1) On calcule d'abord le module : $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

2) On cherche donc $\theta = \arg(z)$ tel que $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{-1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{2} \iff \cos(\theta) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iff \begin{cases} \theta = \dfrac{2\pi}{3}[2\pi] \\ \text{ou} \\ \theta = -\dfrac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

Or $\sin(\theta) > 0$ donc $\arg(z) = \theta = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

3. Égalité de deux nombres complexes par module et argument

THÉORÈME

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument.

REMARQUES :

- $|z| = 0 \iff z = 0$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) = 0$ ou $\pi\ [2\pi]$ ou $z = 0$.
- z est un imaginaire pur $\iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $z = 0$.
- Attention, pour l'égalité des arguments, il faut la penser « à 2π » près.

4. Passage d'une forme à l'autre

THÉORÈME

Soit z un complexe non nul. $z = a + ib = r\left(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\right)$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases} \iff \begin{cases} a = r\cos(\theta) \\ b = r\sin(\theta) \end{cases}$$

VI. Module, argument et opérations avec les nombres complexes

Dans les deux théorèmes qui suivent z et z' sont des nombres complexes.

THÉORÈME

1) $z \times \overline{z} = \|z\|^2$	
2) $\|-z\| = \|z\|$	$\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$ pour $z \neq 0$.
3) $\|z\| = \|\overline{z}\|$	$\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$ pour $z \neq 0$.
4) $\|z \times z'\| = \|z\| \times \|z'\|$	$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$ pour $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.
5) $\|z^n\| = \|z\|^n$ pour $n \in \mathbb{N}$	$\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$ si $z \neq 0$.

PREUVE

1) Ce point a été déjà prouvé précédemment.
2) Il suffit d'utiliser la propriété de symétrie par rapport à l'origine.
3) De même avec la symétrie par rapport l'axe des ordonnées.
4) Si $z = 0$ ou $z' = 0$, alors $|zz'| = 0$ et $|z||z'| = 0$ d'où l'égalité.
Si $z, z' \in \mathbb{C}^*$ alors : $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ et $z = r'(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta'))$.
$zz' = rr'(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + \mathrm{i}(\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta))$.
Ce qui donne d'après les formules d'addition pour sinus et cosinus :

$$zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta')).$$

Or, $rr' > 0$ donc $zz' = rr' = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$. Ce qui prouve bien le point 4).
5) Ces égalités se montrent par récurrence.

THÉORÈME

1) $z \neq 0 : \left\|\dfrac{1}{z}\right\| = \dfrac{1}{\|z\|}$	$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
2) $z' \neq 0 : \left\|\dfrac{z}{z'}\right\| = \dfrac{\|z\|}{\|z'\|}$	$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$ pour $z \neq 0$

PREUVE

1) z est un complexe non nul. On a $z \times \dfrac{1}{z} = 1$ qui donne d'une part $\left|z \times \dfrac{1}{z}\right| = 1$ c'est-à-dire $|z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right| = 1$. Et enfin $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
D'autre part, $\arg\left(z \times \dfrac{1}{z}\right) = \arg(1)[2\pi]$ donne $\arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0[2\pi]$.
On en conclut le point 1).
2) z et z' deux complexes avec $z' \neq 0$
$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{|z|}{|z'|}$
et si $z \neq 0$: $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.

Exercice d'application

1) $z_1 = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_2 = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}$ deux nombres complexes. Déterminer le module et un argument de $z_1 z_2$.

2) Déterminer la forme algébrique de $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{2016}$.

Correction

1) • $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2$ et $|z_2| = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$. Donc : $|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

• $\theta_1 = \arg(z_1)$ est tel que $\begin{cases} \cos(\theta_1) &= \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_1) &= \frac{1}{2} \end{cases}$

$\sin(\theta_1) = \frac{1}{2} \iff \theta_1 = \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ ou $\frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$, or $\cos(\theta_1) < 0$ donc $\theta_1 = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$

$\theta_2 = \arg(z_2)$ est tel que $\begin{cases} \cos(\theta_2) &= \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} \\ \sin(\theta_2) &= \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{1}{3}} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta_2) &= \frac{1}{2} \\ \sin(\theta_2) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\cos(\theta_2) = \frac{1}{2} \iff \theta_2 = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $\frac{-\pi}{3}[2\pi]$, or $\sin(\theta_2) > 0$ donc $\theta_2 = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Donc : $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}\,[2\pi]$.

2) On remarque : $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} = -3z_2$ et donc : $|z| = 3 \times |z_2| = 1$ et $\arg(z) = \arg(z_2) + \pi[2\pi] = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$\arg\left(z^{2016}\right) = 2016 \times \arg(z) = 2016 \times \frac{2\pi}{3}[2\pi] = 672 \times 2\pi[2\pi] = 0[2\pi]$.

De plus $|z| = 1$ donc $\left|z^{2016}\right| = |z|^{2016} = 1$.

On en déduit : $z^{2016} = 1 \times (\cos(0) + \mathrm{i}\sin(0)) = 1$.

VIII. Applications des nombres complexes à la géométrie

THÉORÈME

- Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.
  $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = |z_B - z_A|$ et $\arg(z_B - z_A) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}}\right)\,[2\pi]$.
- Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.
  $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)\,[2\pi]$.

PREUVE

- Soient A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.
  Il existe un unique point M d'affixe z tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Les affixes de ces deux vecteurs sont donc égales ce qui donne : $z = z_B - z_A$.
  On en déduit que $|z| = |z_B - z_A|$ et $\arg(z) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.
  Donc $OM = AB = |z_B - z_A|$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = \arg(z_B - z_A)[2\pi]$.
- Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D.
  Par les propriétés de l'argument on a :

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A).$$

Ce qui donne par définition de l'argument :

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{CD}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{CD}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)[2\pi]$$

la dernière égalité résultant de la relation de Chasles pour les angles de vecteurs.

Exercice d'application **Ensembles de points**

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z satisfaisant la condition :

- $|z+1-\mathrm{i}|=3$.
- $|z-3|=|z+2+3\mathrm{i}|$.
- $\arg(z-1-\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.
- $\arg\left(\dfrac{z-1+2\mathrm{i}}{z+1}\right)=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Correction

- $|z+1-\mathrm{i}|=3 \Longleftrightarrow |z-(-1+\mathrm{i})|=3 \Longleftrightarrow AM=3$ avec A point d'affixe $z_A=-1+\mathrm{i}$. Donc M appartient au cercle de centre $A\,(-1\,;1)$ et de rayon 3.
- $|z-3|=|z+2+3\mathrm{i}| \Longleftrightarrow |z-3|=|z-(-2-3\mathrm{i})| \Longleftrightarrow BM=CM$ avec B d'affixe $z_B=3$ et C d'affixe $z_C=-2-3\mathrm{i}$. Donc M appartient à la médiatrice de $[BC]$.

- $\arg(z-1-\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}[2\pi] \Longleftrightarrow \arg(z-(1+\mathrm{i}))=\dfrac{\pi}{4}[2\pi] \Longleftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{EM}}\right)=\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ avec E d'affixe $z_E=1+\mathrm{i}$.

  Donc M appartient à la demi-droite d'origine E privé de E, de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{u_1}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.
- $\arg\left(\dfrac{z-1+2\mathrm{i}}{z+1}\right)=\dfrac{\pi}{2}\,[\pi] \Longleftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{GM},\overrightarrow{FM}}\right)=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$ avec F d'affixe $z_F=1-2\mathrm{i}$ et G d'affixe $z_G=-1$.

  Donc M appartient au cercle de diamètre $[FG]$ privé des points F et G.

Remarques :

1) Trois points distincts sont alignés si et seulement si : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=0\,[\pi]$ ce qui équivaut à :

$\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=0\,[\pi] \Longleftrightarrow \dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est un réel non nul.

2) Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$; c'est-à-dire :

$\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$ et $B\neq A$ et $C\neq A \Longleftrightarrow \dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est un imaginaire pur non nul.

JCQ Lombres complexes et configurations géométriques

Exercice d'application

A, B, C trois points d'affixes respectives : $z_A=2\mathrm{i}$, $z_B=2+\mathrm{i}$, $z_C=1-\mathrm{i}$.
Démontrer que le triangle ABC est isocèle rectangle en B.

Correction

$AB=|z_B-z_A|=|2-\mathrm{i}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ et $BC=|z_C-z_B|=|-1-2\mathrm{i}|=|1+2\mathrm{i}|=\sqrt{5}$ donc ABC isocèle en B. D'autre part :

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-2+\mathrm{i}}{-1-2\mathrm{i}}=\frac{(-2+\mathrm{i})(-1+2\mathrm{i})}{1+4}=-\mathrm{i}.$$

Donc $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)=\arg\left(\dfrac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\arg(\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ donc ABC est rectangle en B.

IX. Forme exponentielle

1. Écriture exponentielle des complexes de module 1

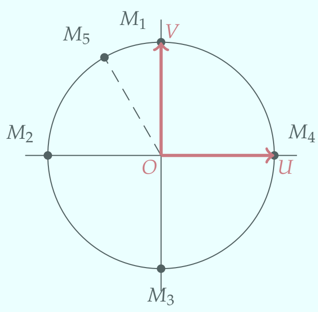
DÉFINITION

Tout nombre complexe de module 1 et d'argument θ peut s'écrire sous la forme :

$$\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Exemples

1) Placer sur le cercle trigonométrique les points M_i d'affixes z_i tels que : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$; $z_2 = e^{i\pi}$; $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$; $z_4 = e^{i2\pi}$; $z_5 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.



2) La forme algébrique des complexes précédents est :
$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$;
$z_2 = e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$;
$z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$;
$z_4 = e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$;
$z_5 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Cas général

DÉFINITION

Tout complexe $z \neq 0$ s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z)[2\pi]$.
Cette écriture est appelée « **forme exponentielle du complexe z** ».
Réciproque : Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\pi]$.

REMARQUE : Pour déterminer la forme exponentielle d'un complexe z, on reprend la méthode 6 pour la détermination de r et de θ.

Exemples

1) Déterminons la forme exponentielle de $z_1 = -2i$ et $z_2 = 1 + i$.
On peut déterminer le module et un argument par la méthode précédemment donnée mais on peut aussi opérer de la manière suivante :

$$z_1 = -2i = 2(-1 + 0i) = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2) Déterminons la forme algébrique de $z_3 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$:

$$z_3 = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 + 2i\sqrt{3}.$$

3. Calculs avec la notation exponentielle

THÉORÈME

Pour tous nombres réels θ_1, θ_2 :

1) $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

2) $\left(e^{i\theta_1}\right)^n = e^{in\theta_1}, \quad n \in \mathbb{Z}$

3) $\dfrac{1}{e^{i\theta_1}} = e^{-i\theta_1} = \overline{e^{i\theta_1}}$

4) $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

REMARQUES :
- Ces propriétés sont admises. Elles résultent du fait que $|e^{i\theta}| = 1$ et des propriétés des arguments.
- La propriété 2) s'appelle *formule de Moivre* quand on l'écrit sous la forme $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta), n \in \mathbb{Z}$

Utilisation de la forme exponentielle

Exercice d'application

1) Mettre sous forme exponentielle : $z_1 = -\sqrt{3} + i,\ z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} z_1^2\ ,\ z_3 = \dfrac{2z_1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

2) Déterminer les entiers n tels que $(-z_1)^n$ est un nombre réel.

3) Soit $Z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}}$ un complexe.

a) Déterminer la forme exponentielle du complexe Z.

b) Déterminer la forme algébrique du complexe Z. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Correction

1) En employant la méthode 6 on trouve $|z_1| = 2$ puis $\arg(z_1) = \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$. Donc $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

On en déduit : $z_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{\frac{2\times 5\pi}{6}} = 4i\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{6}} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = -4\mathrm{i}$

et $z_3 = \dfrac{2 \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}{5\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}} = \dfrac{4}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{4}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -\dfrac{4}{5}$.

2) $z_1 = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et donc $(-z_1)^n = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{6}}\right)^n = 2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-n\pi}{6}}$.

$(-z_1)^n$ est réel $\iff \dfrac{-n\pi}{6} = 0[\pi] \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{-n\pi}{6} = k\pi \iff n = -6k$.

Donc $(-z_1)^n$ est réel si et seulement si n est un multiple de 6.

3) a) On a : $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc

$Z = \dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$ est la forme exponentielle de Z.

b) $Z = \dfrac{(1+\mathrm{i})(\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2})}{8} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$ est la forme algébrique de Z.

On a donc : $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$.

D'où : $\dfrac{1}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$.

On en déduit : $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

REMARQUE :
La notation exponentielle permet de retrouver les formules d'addition pour le cosinus et le sinus.

4. LA LINEARISATION

a-Formules et applications

THÉORÈME : Formules de Moivre

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\quad \boxed{e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n} \quad \text{c'est à dire} \quad \boxed{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n}$$

APPLICATION : Pour exprimer $\cos n\theta$ ou $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

1. On remarque que $\cos n\theta = \mathrm{Re}[(\cos\theta + i\sin\theta)^n]$ et que $\sin n\theta = \mathrm{Im}[(\cos\theta + i\sin\theta)^n]$
2. Puis on utilise la formule du binôme pour développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$
3. On en extrait alors la partie réelle et la partie imaginaire pour obtenir $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$.

THÉORÈME : Formules d'Euler
Soit θ un réel quelconque. Alors :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \quad \textit{et} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Remarque . Ces formules permettent de linéariser (transformer des produits en sommes) des expressions trigonométriques. Cette transformation est particulièrement utile lors du calcul d'intégrales.

b-**LINEARILISATION** : Pour *linéariser* un produit de sinus et de cosinus :

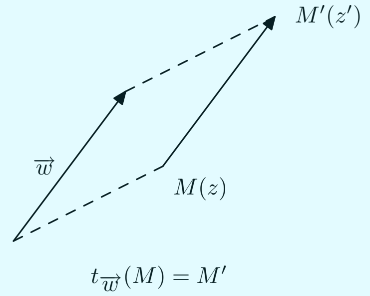
1. On remplace les $\cos(a.\theta)$ et les $\sin(b.\theta)$ à l'aide des formules d'Euler.
2. On développe l'expression obtenue à l'aide de la formule du binôme.
3. On regroupe les termes conjugués entre eux.
4. On réutilise les formules d'Euler pour retrouver des cosinus et des sinus.

5. Nombres complexes et transformations

a-Ecriture complexe d'une translation

Theorème :

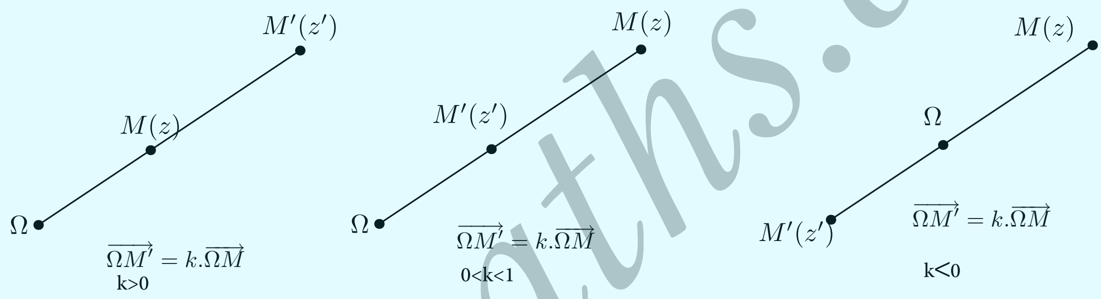
$\overrightarrow{w}$ est un vecteur d'affixe b.
L'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$, qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ est $z' = z + b$.



b-Ecriture complexe de l'homothétie

Theorème :

Ω est un point d'affixe ω et k un réel non nul. L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k, qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ est $z' - \omega = k(z - \omega)$.

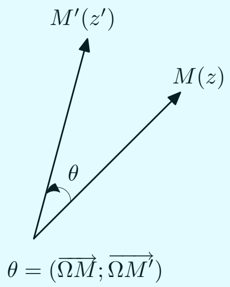


h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k ; $M' = h(M)$ équivaut à $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.
On note z et z' les affixes respectives de M et M', l'affixe de $\overrightarrow{\Omega M'}$ est $z' - \omega$, celle de $k\overrightarrow{\Omega M}$ est $k(z - \omega)$. Donc $M' = h(M)$ équivaut à $z' - \omega = k(z - \omega)$.

c-Ecriture complexe d'une rotation

Theorème :

Ω est un point d'affixe ω et θ un réel. L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ, qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ est $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.



R est la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ ; $M' = R(M)$ équivaut à $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$ et $\Omega M' = \Omega M$.
On note z et z' les affixes respectives de M et M', l'affixe de $\overrightarrow{\Omega M'}$ est $z' - \omega$, celle de $\overrightarrow{\Omega M}$ est$(z - \omega)$.

Donc $M' = R(M)$ équivaut à $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.