NOMBRES COMPLEXES AU BAC SCIENCES EXPÉRIMENTALES

I)DÉFINITION ET VOCABULAIRE :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

– $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

– L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

– Il existe un nombre complexe noté i tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

– Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique : $z = a + ib$ avec a et b sont des réels. L'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z.

a est **la partie réelle** de z, notée $\boldsymbol{Re(z)}$, b est **la partie imaginaire** de z notée $\boldsymbol{Im(z)}$.

Remarque :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

- Si $b = 0$, z est réel.
- Si $a = 0$, z est dit **imaginaire pur**.

Conséquences :

Soit z et z' deux nombres complexes.

- z est réel ssi $Im(z) = 0$.
- z est imaginaire pur ssi $Re(z) = 0$.
- $z = 0$ ssi $Im(z) = Re(z) = 0$.
- $z = z' \Leftrightarrow Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.

II)AFFIXE D'UN COMPLEXE ET IMAGE D'UN POINT

Définition :

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $M(a, b)$ un point du plan.

- On appelle **affixe** de M, le nombre complexe noté $aff(M)$ ou z_M tel que : $aff(M) = a + ib$. Le nombre complexe $a + ib$ est dit aussi l'affixe du vecteur $\overline{OM}$, on le note $aff(\overline{OM})$ ou $z_{\overline{OM}}$.
- $M(a, b)$ est le **point image** du nombre complexe $z = a + ib$.

Propriétés :

A et B sont deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs.

1) $aff(\overrightarrow{AB}) = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
2) $aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\, aff(\vec{u}) + \beta\, aff(\vec{v})$ pour tous réels α et β.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\vec{v} \neq \vec{0}$.

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est réel.

2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est imaginaire pur.

III) Conjugué d'un nombre complexe

Définition :

Soit $z = a + ib$ un nobre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par $\boldsymbol{\bar{z} = a - ib}$.

Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.

1) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$

2) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$

3) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n, n \in \mathbb{N}^*$

4) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}, z' \neq 0$

5) $z + \bar{z} = 2Re(z)$

6) $z - \bar{z} = 2iIm(z)$

7) $z \cdot \bar{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2$

8) z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

9) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

IV) Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **module** de z et on note $|z|$, le réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.

1) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

2) $|-z| = |z|$

3) $|\bar{z}| = |z|$

4) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

5) $|z^n| = |z|^n, n \in \mathbb{N}^*$

6) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0$

7) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

8) $z\bar{z} = |z|^2$

9) $|kz| = |k||z|, k \in \mathbb{R}$

Propriété :

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors : $AB = |z_B - z_A|$

V) Argument d'un nombre complexe non nul

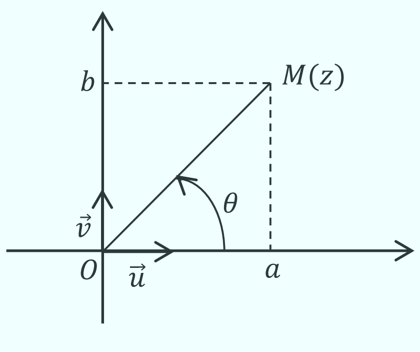
Définition

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

$z = a + ib$ (a et b sont des réels) est un nombre complexe non nul d'image M.

On appelle **argument** de z et on note $arg(z)$, toute mesure, en radian, de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$.

$arg(z) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})\ [2\pi]$



Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

1) $arg(\bar{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$
2) $arg(-z) \equiv \pi + arg(z)[2\pi]$
3) Si $k > 0$, alors $arg(kz) \equiv arg(z)[2\pi]$
4) Si $k < 0$, alors $arg(kz) \equiv \pi + arg(z)[2\pi]$
5) $arg(z \cdot z') \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi]$
6) $arg(z^n) \equiv n \cdot arg(z)[2\pi]$
7) $arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -arg(z)[2\pi]$
8) $arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg(z) - arg(z')[2\pi]$

Propriétés :

Le plan est muni d'un ROND $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$.

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \boldsymbol{arg}\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right) + \boldsymbol{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

En particulier, si A, B, C et D sont quatre d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D, alors :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = \boldsymbol{arg}\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + \boldsymbol{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Théorème :

Soit z un nombre complexe non nul d'écriture algébrique $\boldsymbol{z = a + ib}$ et θ un argument de z. Alors : $\boldsymbol{a = |z| \cos\theta}$ et $\boldsymbol{b = |z| \sin\theta}$ ou encore : $\boldsymbol{\cos\theta = \frac{a}{|z|}}$ et $\boldsymbol{\sin\theta = \frac{b}{|z|}}$

On a alors : $\boldsymbol{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)}$

VI)Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit z un nombre complexe non nul.

L'écriture de z sous la forme $|z|(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$ ou $[|z|, \theta]$ où θ désigne un argument de z est appelée **écriture trigonométrique** ou **forme trigonométrique** de z.

$$\boldsymbol{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = [|z|, \theta]}$$

$|z|$ et θ sont les **coordonnées polaires** du point $M(z)$.

Propriétés :

Soient $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ deux nombres complexes non nuls avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $r' \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$.

1. $\bar{z} = [r, -\theta]$
2. $z \cdot z' = [r \cdot r', \theta + \theta']$
3. $z^n = [r^n, n\theta]$
4. $\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$
5. $\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$

VII)Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition

> Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.
>
> Soit $z = [r, \theta]$ un nombre complexe non nul. L'écriture $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$ est **la forme exponentielle** de z.

Propriétés :

> Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls avec $r \in \mathbb{R}$, $r' \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}_+$ et $\theta' \in \mathbb{R}_+^*$
>
> 1. $\bar{z} = re^{-i\theta}$
> 2. $z \cdot z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
> 3. $z^n = r^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$
> 4. $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\, e^{-i\theta}$
> 5. $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\, e^{i(\theta-\theta')}$

Formules d'Euler :

> Pour tout réel θ on a : $\boldsymbol{\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta}$ et $\boldsymbol{\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta}$

Formule de Moivre :

> Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a : $\boldsymbol{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$

VIII)Équation du second degré à coefficients réels

Définition :

> Soient a, b et c trois nombres réels donnés tels que $a \neq 0$.
>
> L'équation :$\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$ s'appelle équation du second degré à coefficients réels.

Théorème :

> Soit (E): $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré à coefficients réels .
>
> On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Appelé le discriminant de l'équation (E).
>
> 1) Si $\Delta = 0$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ une solution double : $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$
> 2) Si $\Delta > 0$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions réels distinctes : $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
> 3) Si $\Delta < 0$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions complexes conjuguées :
>
> $$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Conséquences :

> Soit (E): $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré à coefficients réels
>
> Si z_1 et z_2 sont les solutions de (E), alors :
>
> $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$; $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$.