Equations différentielles linéaires

I) *Equation Différentielle Linéaire du 1er ordre :* $y' = ay$ avec $a \in IR$

Définitions :

1 - L'équation suivante : $(E): y' = ay + b$ ou a *et* b deux constante, est appelé équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre **un**, ou y est la fonction inconnue.

2 - On appelle solution de l'équation différentielle (E), toute fonction f qui vérifie (E).

Propriétés : - Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est un réel.

- Quel que soit le couple $(x_0; y_0)$ de réels, équation différentielle (E) admet une unique solution f qui vérifie $f(x_0) = y_0$

II) *Equation Différentielle Linéaire du 2nd ordre :* $y'' + ay' + by = 0$ avec $(a;b) \in IR^2$

Définition :

L'équation $r^2 + a.r + b = 0$, s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle $(E): y'' + ay' + by = 0$

Exemple :

L'équation caractéristique de $y'' + 8y' + 3y = 0$ est $r^2 + a.r + b = 0$

Résolution d'une équation (E) : Soit Δ le discriminant de l'équation **caractéristique**.

Δ	L'équation **caractéristique** admet	Les solutions de (E) sont les fonctions
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles r_1 et r_2	$y: x \mapsto ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$ ou $(a,b) \in IR^2$
$\Delta = 0$	Une seule solution réelle r	$y: x \mapsto (ax+b)e^{rx}$ ou $(a,b) \in IR^2$
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$	$y: x \mapsto e^{px}\left(a\cos(qx) + b\sin(qx)\right)$ ou $(a,b) \in IR^2$

Rappel : Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$,
sont les fonctions $y: x \mapsto a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ ou $(a,b) \in IR^2$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice1:

Soit (E) l'équation différentielle: $y' = 3y + 1$.

1. Résous l'équation (E).

2. Déterminer la solution f de (E) qui prend la valeur **6** en **0**

Exercice2:

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y'' + 16y = 0$

1. Résous l'équation (E_1).

2. Déterminer la solution f de (E_1), telle que:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \quad \text{et} \quad f'(\pi) = 8.$$

3. Montrez que, $(\forall x \in IR): f(x) = 2\sqrt{2}\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice3 :

Soit (E_2) l'équation : $y'' + y' - 2y = 0$.

1. Résous l'équation (E_2).

2. Déterminer la solution f de (E_2), qui vérifie les deux conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

Exercice4 :

Soit (E_3) l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 4y = 0$

1. Résous l'équation (E_3).

2. Déterminer la solution f de (E_3), qui vérifie les deux conditions $f(0) = 4$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = e$.

3. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$.

Exercice5 :

Soit (E_4) l'équation différentielle: $y'' - 4y' + 13y = 0$.

1. Résous l'équation (E_4).

2. Déterminer la solution f de (E_4), qui vérifie les deux conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 6$.

3. En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$.