

2018/2019

Ex 1 : (7pts)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 2}$.

1°) Déterminer D_f et montrer que f est paire (0.5pt)

2°) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = 3 - \frac{7}{x^2 + 2}$ (0.5pt)

3°) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $-\frac{1}{2} \leq f(x) < 3$ (1pt)

b) Est ce que $-\frac{1}{2}$ est une valeur minimale absolue de f (0.5)

4°) Soient a et b deux éléments distincts de $\mathbb{R}$

a) Montrer que $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{7(a+b)}{(a^2+2)(b^2+2)}$ (1pt)

b) Dédurre les variations de f sur les intervalles $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$ (1pt)

En utilisant la monotonie h Montrer que si $a + b \geq \sqrt{2}$ alors $\frac{1}{(a+b)^2+2} \leq \frac{1}{4}$ (1pt)

5°) On considère la fonction g définie par $g(x) = x^2$ et on pose $h = f \circ g$

a) Déterminer D_h (0.5pt)

b) Etudier les variations de h sur $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$ (2pts)

Ex 2 : (4pts)

1°) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $0 \leq x - E(x) < 1$ (1pt)

2°) On considère la fonction on g définie par $g(x) = \frac{x - E(x)}{x + 1 - E(x)}$

a) Montrer que $D_g = \mathbb{R}$ (1pt)

b) Montrer que tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g(x+1) = g(x)$ (1pt)

c) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$ $g(x) = \frac{x}{x+1}$ (1pt)

Ex 3 : (3pts)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3}$

1°) Déterminer D_f (1pt)

2°) Montrer que $1 = \min f(x)$ et $\frac{7}{3} = \max f(x)$ (2pts)

Ex 4 : (6pts)

On pose $f(x) = x + 4 - 2\sqrt{x+2}$

1°) Déterminer D_f (1pt)

2°) Montrer que f est minorée par 1 (1pt)

3°) Montrer que f est la composée de deux fonctions u et v (càd $f = u \circ v$), déterminer u et v (2pts)

4°) Etudier les variations de f sur $[-1, +\infty[$ (2pts)

Bonus : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4E(x) + 1 = x$

(+2)