MATHÉMATIQUES

2^e BACCALAURÉAT SCIENCES - PC
DS5

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 heures - COEFFICIENT : 7

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction f définie, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, par :

$$f(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$$

1) Étudier les variations de f.

2) En déduire que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f(x) > 0$.

PARTIE B

On considère maintenant la fonction g définie, pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, par :

$$g(x) = x + 2\,\frac{\ln x}{x}$$

On appelle (C) la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{I},\vec{J})$. (On prendra pour unité 3 cm).

1) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2) a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

b) Démontrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.

3) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

4) a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe ($\mathcal{C}$).

b) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à (Δ).

5) a) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1.

b) On admettra que la courbe (C) est entièrement située au-dessous de la tangente (T) .Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (T) avec l'axe des abscisses.

c) Déduire de la question 5)b), et sans calcul, le signe de $g(\frac{2}{3})$.

d) Démontrer qu'il existe un réel α unique, appartenant à $[\frac{2}{3}; 1]$, tel que : $g(\alpha) = 0$.

6) Dans le repère $(O,\vec{I},\vec{J})$, tracer la courbe (C), la droite (Δ) et la tangente (T)
on admet que (C) a un point d'inflexion d'abscisse $e^{3/2}$

On prendra : $\ln 2 = 0{,}69$ $\ln 3 = 1{,}10$ $\ln 5 = 1{,}61$ $e = 2{,}7$ $e^{3/2} = 2{,}5$

I- Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle IR par :

$g(x)=e^{x}-x^{2}+3x-1$

Et son tableau de variation ci-dessous :

X	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

1. Vérifier que $g(0)=0$
2. Déterminer le signe de g(x) sur chacun des intervalle $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty[$

II- Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle IR par :

$f(x)=(x^{2}-x)e^{-x}+x$, Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- a) Vérifier que $f(x)-x$ et $(x^{2}-x)$ ont le même signe sur IR.

b) Déduire que (C) est au-dessus de la droite (D) sur $\left(]-\infty;0]\cup[1;+\infty[\right)$ et au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0;1]$.

2- a) Montrer que pour tout x dans IR ;on a : $f'(x)=g(x).e^{-x}$

b) Déduire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur IR.sans calcul de limites

III – On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0=\dfrac{1}{2} \\ U_{n+1}=f(U_n) \quad (\forall n\in IN) \end{cases}$$

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n. $0\le U_n\le 1$

(On peut utiliser le résultat de la question II-3-b))

2. Montrer que la suite (U_n) est décroissante
3. En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.