LES COMPLEXES EN TERMINALE PC

Prof : Filali Jaouad	Les complexes 1/2	Année scolaire : 2020/2021

Exercice 1 Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants :

$z_1 = (1-i)(2+3i)$; $z_2 = (1-i)^2$; $z_3 = (1+i)^2$; $z_4 = (2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$

$z_5 = \frac{-2+6i}{-3-i}$; $z_6 = \frac{4-5i}{3+2i}$; $z_7 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2018}$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

(E₁) $(z+i)(\overline{z}-5) = z^2 - i$; **(E₂)** $(z-3i)(2z-1) = 1-4z^2$; **(E₃)** $z^2+9=0$; **(E₄)** $(1-i)z - 2 + 3i = 0$

Exercice 3

Le plan complexe ~~est~~ est muni d'un repère O.N.D $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit M un point d'affixe z On pose : $Z = \frac{z-1}{z+1}$

1) Ecrire Z sous forme algébrique.
2) Déterminer l'ensemble des points M pour que $Z \in \mathbb{R}$
3) Déterminer l'ensemble des points M pour que $Z \in i\mathbb{R}$

Exercice 4 Le plan complexe est muni d'un R.O.N.D $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On pose $U = \frac{z-i}{z+1}$ Déterminer les ensembles suivants :

(C_1) : {M ∈ (P) / U ∈ IR}, **(C_2) :** {M ∈ (P) / U ∈ i IR} ; **(C_3) :** {M ∈ (P) / U ∈ IR_+^* }, **(C_4) :** {M ∈ (P) / $|U| = 1$}

Exercice 5 : On considère les points $A\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$; $B(z)$; $C\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

Déterminer z pour que ABC soit un triangle équilatéral

Exercice 6 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

(1) $|z+2-i| = 2$; (2) $|z-1+5i| = |z+z-i|$; (3) $|(z+2-i| \leq 2$; (4) $\left|\frac{z-2i}{z+1+i}\right| = 1$

Exercice 7 Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$Z_1 = 3-3i$; $Z_2 = -\sqrt{5} - i\sqrt{15}$; $Z_3 = 1+i$; $Z_4 = \frac{2}{1-i\sqrt{3}}$; $Z_5 = \frac{\sqrt{6}}{1+i}$; $Z_6 = -\cos\alpha + i\sin\alpha$

$Z_7 = -\cos\alpha - i\sin\alpha$; $Z_8 = \cos\alpha - i\sin\alpha$; $Z_9 = 1+\cos\alpha + i\sin\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$

$Z_{10} = \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha + i\sin\alpha}$; $Z_{11} = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Exercice 8 On considere le complexe $U = -3+3i$

1) Ecrire sous forme trigonométrique U.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que : $U \times z = [6\sqrt{2}, \frac{17\pi}{12}]$ Déterminer z. En déduire $\cos\frac{17\pi}{12}$ et $\sin\frac{17\pi}{12}$

Exercice 9 Résoudre alons $\mathbb{C}$:

(1) : $z^2 - 8z + 25 = 0$ **(2)** : $z^2 - 12z + 61 = 0$;**(3):** $z^4 - 8z^2 + 25 = 0$ **(4)** $z^2 - 2\cos\alpha\, z + 1 = 0$

(5) : $(z+1)^2 + (z+3)^2 = 0$

Exercice 10 On considere l'équation (E).**(E) :** $z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1+\sqrt{3}i)z - 8i$

1) Montrer que (E) admet une solution z_0 imaginaire pur.

2) Déterminer a,b,c ϵ IR tel que : **(E)** $\Leftrightarrow$ $(z - z_0)(az^2+bz+c) = 0$

3) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ puis écrire les solutions sous forme trigonométrique et expontielle

Exercice 11

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$. $z^2 - 4z + 8 = 0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté au R.O.N.D $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ les points A(a), B(b) ,C(c) et D(d) avec $a=2+2i$; $b=2-2i$; $c = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $d = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3})$

a- Ecrire b et c sous forme trigonométrique

b- Vérifier que bc=d

c- Déduire l'argument de d .

d- Soit E l'image de B par la rotation de centre 0 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

- Montrer que l'affixe du point E est e = -2 -2i
- Montrer que ABE est est un triangle rectangle et isocèle en B

Exercice 12

I. En considère le nombre complexe $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

1) Montrer que le module du nombre complexe a est $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

2) Vérifier que $a = 2\left(1 + \cos\frac{\pi}{4}\right) + 2i\sin\frac{\pi}{4}$

3) a) En linéarisant $\cos^2\theta$*, où o est un nombre réel, montrer que :* $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$

b) Montrer que $a = 4\cos^2\frac{\pi}{8} + 4i\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$ *(on rappelle que* $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$*)*

c) Montrer que $4\cos\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}\right)$ *est une forme trigonométrique de a ; puis montrer que :*

$a^4 = (2\sqrt{2+\sqrt{2}})^4 i$

II. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$*, on considère les points Ω et A d'affixes respectives* ω *et a où* $\omega = \sqrt{2}$ *et* $a = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que l'affixe b du point B image du point A par R est 2i .

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z tels que : $|Z - 2i| = 2$.