Prof : Filali Jaouad

Exercices sur les suites 1^er SM2

Ex 1 : On considère la suite (U_n) définie par : $(\forall n \in IN) u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

Montrer que la suite (u_n) est majorée ? La suite (u_n) est elle bornée ? Justifier ?

Ex 2: On considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $(\forall n \in IN^*)$ $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

Montrer que $(\forall n \in IN^*)$ $\sqrt{n-1} = \dfrac{2-U_n{}^2}{2U_n}$ La suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est elle bornée ? Justifier ?

Ex 3: On pose $(\forall n \in IN^*)$ $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

1°) Etudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$

2°) Montrer que $(\forall n \in IN^*)$ $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ en déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est bornée .

3°) a)On pose $(\forall n \in IN^*)$ $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ Etudier la monotonie de la suite $(V_n)_{n\geq 1}$

b)Montrer que $(\forall n \in IN^*)$ $V_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$ En déduire que $(V_n)_{n\geq 1}$ est minorée et non majorée

---

Ex 4: On considère la suite (U_n): $U_0 = E(a)$ tq $a \in]1,+\infty[$ et $(\forall n \in IN) u_{n+1} = u_n + E(u_n)$

1°) Calculer u_1 et u_2

2°) Calculer $E(U_n)$ en fonction de m en déduire U_n en fonction de n .

Ex 5: On considère la suite (u_n) déduire par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1}$

1°) Montrer que $(\forall n \in IN)$ $U_n > 2$

2°) Etudier la monotonie de la suite (U_n) et en déduire un encadrement de la suite (U_n)

3°) On pose $(\forall n \in IN)$ $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique déterminé sa raison et son prunier terme.

b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n .puis calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} v_i$

Ex 6: On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0 ; u_1 = 1$ et $(\forall n \in IN)$ $u_{n+2} = \dfrac{2}{5}u_{n+1} - \dfrac{1}{25}u_n$

On pose pour tout $n \in IN$ $a_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{5}u_n$ et $b_n = 5^n \times U_n$

1°) Montrer que (a_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$ puis calculer a_n en fonction de n

2°) Montrer que (b_n) est une suite arithmétique de raison $n = 5$ puis calculer b_n en fonction de n .

3°) Exprimer U_n en fonction de n puis montrer que $(\forall n \in IN^*))$ $0 < u_{n+1} \leq \dfrac{2}{5}u_n$

4°) En déduire que $(\forall n \in IN^*)$ $0 < u_n \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$

Ex 7: On pose $U_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$

Ex 8: soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in IN)$ $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}(u_n - 4n - 1)$ On pose $v_n = u_n + n - 1$

1°) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ Calculer v_n puis u_n en fonction de n

2°) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} v_i$ et $T_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$ Calculer S_n en fct de n puis montrer que $T_n = S_n - \dfrac{(n+1)(n-2)}{2}$