-Sur GENERALITES SUR LES FONCTIONS NUMERIQUES-1bac SM

Exercice 1. .

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = x + E(x)$. *oŭ $E(x)$ désigne la partie entière du nombre réel x.*

1)a)- Montrer que :
$\left(\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2\right)\left(a > b \Longrightarrow g(a) > g(b)\right)$.

b)- en déduire que la fonction g est injective.

2)- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $2x - 1 < g(x) \leq 2x$.

3)- On considère l'équation : (I) : $g(x) = \dfrac{3}{2}$.

a)- Montrer que si x est une solution de l'équation (I) alors $x \in [\frac{5}{4}, \frac{5}{4}[$.

b)Par disjonction des cas, montrer que l'équation (I) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

c)- Qu'est ce que vous en déduisez ?

Exercice 2. .

On considère la fonction h définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$h(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$$

1)- Montrer que h est strictement décroissate.

2)- Déduire que la fonction h est injective.

3)- Montrer que :
$(\forall x \in [1, +\infty[)$; $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} < h(x) < \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)$.

4)- En déduire que : $h([1, +\infty[) \subseteq]0, 1]$.

5)- Est ce que $\frac{1}{2}$ admet un antécédent par h ? est ce que la fonction h est surjective.

Exercice 3. .

Soit f la fonction numérique définie par :
$f(x) = \dfrac{x}{x^2 + m}$. *oŭ est un paramètre réel.*

1)- Determiner suivant les valeurs du paramètre m le domaine de définition D_f de f.

2)- Montrer que la fonction f est impaire.

3)- Dans la suite, on suppose que $m > 0$.

a)- Etudier la monotonie de f sur les intervalles suivants : $[0, \sqrt{m}]$ et $[\sqrt{m}, +\infty[$.

b)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\left(0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{m}}\right)$.

c)- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $\left(|f(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{m}}\right)$.

Exercice 4. .

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble et $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ une application telle que $fofof = f$.

- Montrer que : f est injective $\Longleftrightarrow$ f est surjective.

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble et $p : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ une application telle que $pop = p$.

Montrer que si p est injective ou surjective, alors : $p = Id_{\mathbb{E}}$.

Exercice 5. .

1)- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = x^2 - 2x - 2$$

a)- Determiner la nature de C_f la courbe représentative de f, et ces éléments caractéristiques.

b)- Dresser un tableau de variation pour f.

c)- Construire C_f.

2)- On considère la fonction numérique u définie par :

$$u(x) = \sqrt{2x+1}$$

a)- Determiner le domaine de définition de u.

b)- Dresser un tableau de variation pour la fonction u.

3)- On considère la fonction numérique h définie par :

$$h(x) = 2x - 1 - 2\sqrt{2x+1}$$

a)- Determiner D_h le domaine de définition de h.

b)- Verifier que :$(\forall x \in D_h)$, $h(x) = (fou)(x)$.

c)- Déduire les variations de h sur les intervalles suivants : $[-\frac{1}{2}, 0]$et$[0, +\infty[$, puis dresser le tableau de variation de h.

4)- Soit k la restriction de h sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

a)- En utilisant les tableaux de variations respectifs de u et f, montrer que $k([0, +\infty[) = [-3, +\infty[$.

b)- Montrer que la fonction k est bijective de $[0, +\infty[$ vers $[-3, +\infty[$, et determiner sa bijection réciproque.

5) a)- Résoudre dans $[0, +\infty[$, l'équation : $k(x) = x$.

b)- Déduire L'ensemble des nombres réels x qui verifient :$k(x) \leq x \leq k^{-1}(x)$.

Exercice 6. .

Soit $\mathbb{E}$ un ensemble non vide et $\mathbb{A}$ une partie de $\mathbb{E}$ telle que $\mathbb{A} \neq \emptyset$ et $\mathbb{A} \neq \mathbb{E}$.et soit ω l'application définie par : $\omega : \mathcal{P}(\mathbb{A}) \longrightarrow [0, 1]$.

$$\begin{cases} \omega(\mathbb{X}) \longmapsto 1;\ si\ \mathbb{X} \subseteq \mathbb{A} \\ \omega(\mathbb{X}) \longmapsto 0;\ si\ \mathbb{X} \not\subseteq \mathbb{A} \end{cases}$$

1)- Determiner $\omega(\mathbb{A})$; $\omega(\emptyset)$; $\omega(\mathbb{E})$.

2)- Montrer que l'application ω est surjective.

3)- Est ce que l'application ω est injective ? justifier votre réponse.

4)a)-Determiner $\omega^{-1}(\{1\})$, puis en déduire $\omega^{-1}(\{0\})$.

b)- Résoudre dans $\mathcal{P}(\mathbb{E})$, l'équation $\omega(\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}) = 1$