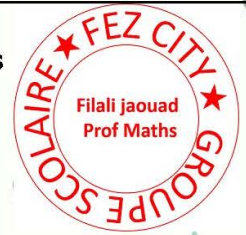


EXERCICE 1

1- Déterminer Df puis étudier la continuité de f au point x_0 dans les cas suivants

(a) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad x_0 = 0$

(b) $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x} & ; x < 0 \\ f(x) = \sqrt{1+x} - \frac{1}{2} & ; x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$



2-On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} & ; x \neq 0 \\ f(0) = a \in \mathbb{R} \end{cases}$

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en $x_0 = 0$

3-On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{2 \sin(x^2)}{x} + 2 & ; x > 0 \\ f(x) = x + 1 + m & ; x \leq 0 \end{cases}$

Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en $x_0 = 0$

4-On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x-a}{x-1} & ; x < 1 \\ f(x) = x^2+b & ; x \geq 1 \end{cases}$

Déterminer les valeurs de a et b pour que f soit continue en $x_0 = 1$

5-On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-7x-6}{|x-3|} & ; x \neq 3 \\ f(3) = 20 \end{cases}$

Etudier la continuité à gauche et à droite de $x_0 = 3$

6- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 \left(E\left(\frac{1}{x}\right) + E\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

a-Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $-2x^2 + x + 1 < f(x) \leq x + 1$

b- En déduire que f est continue en 0

7- On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^3 - 2bx + 1}{2x^2 + ax - a - 2} & \text{si } x < 1 \\ f(1) = \frac{2+c}{3} \\ f(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Déterminer les valeurs de a , b et c pour que f soit continue en $x_0 = 1$

8- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ On considère la fonction f_n définie par : $\begin{cases} f_n(x) = \frac{3x+b}{4} & \text{si } x \geq 2 \\ f_n(x) = \frac{(3-x)^n - a}{x-2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$

Déterminer les valeurs de a et b pour que f_n soit continue en $x_0 = 2$

EXERCICE 2

1- On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a- Montrer que la fonction f est continue en 0 puis Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \alpha^2 x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ g(x) = \frac{8 - \beta^2 x}{2x - 1} & \text{si } 1 < x < 3 \\ g(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{\beta^2}{5}x + \alpha\beta & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Déterminer les réels α et β sachant que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$

**EXERCICE 3** Etudier la continuité des fonctions suivantes sur D_f dans les cas suivants :

- (1) $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 2\sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$
- (4) $f(x) = 2\sin(3x) + \frac{2|x-1|}{x^2+3}$ (5) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+4} & \text{si } x \in [-4, 0] \\ f(x) = 2\sin(x) & \text{si } x \in]0, 4] \end{cases}$

EXERCICE 4

On considère la fonction f continue sur les deux intervalles $]-\infty, 3[$ et $]3, +\infty[$ dont le tableau de Variation est comme suit

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$f(x)$	2	4	6	$+\infty$	2

Déterminer les images des intervalles suivantes: $[0, 2[$; $[2, 3[$; $]-\infty, 0]$; $]-\infty, 3[$; $]3, +\infty[$ par f

EXERCICE 4

1- Montrer que l'équation $x^5 - x^3 + 5x - 4 = 0$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0, 1]$

2- Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ admet au moins une solution sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3- Montrer que la courbe (C_f) de la fonction f définie par $f(x) = \frac{9x^5 - x - 2}{x^2 + 1}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point son abscisse appartient à l'intervalle $[0, 1]$

4- Déterminer le nombre de solution de l'équation $x^3 = x - 3$ dans $\mathbb{R}$

5- On pose $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution x_0

b- Vérifier que $x_0 \in]0, 1[$

c- En utilisant la méthode de dichotomie déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.



Exercice 5 :

Dans tous les cas suivant on considère g la restriction de la fonction f sur l'intervalle I

Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur une intervalle J à déterminer puis

calculer $(\forall x \in J) g^{-1}(x)$

- 1) $I =]-\infty, \frac{1}{2}]$; $f(x) = -x^2 + x + 1$; 2) $I = [0, 1[$; $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
 3) $I = [-2, +\infty[$; $f(x) = x^3 + 8$; 4) $I = [1, +\infty[$; $f(x) = \sqrt{x+1} + x$
 5) $I = [-1, +\infty[$; $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$; 6) $I = [-1, +\infty[$; $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 3$

**Exercice 6 :**

1-Simplifier les expressions suivantes : $A = \frac{\sqrt[4]{3}\sqrt[3]{64}}{\sqrt[5]{32}\sqrt[3]{16}}$; $B = \frac{\sqrt[3]{8}\sqrt[4]{32}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{64}}$; $C = \frac{\sqrt{\sqrt{16}} \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}}$

2-Rendre le dénominateur des expressions suivantes un nombre rationnel $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$

3-Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes $\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3 = 64$; $x^5 + 243 = 0$; $\sqrt[3]{3+x} - \sqrt[3]{3-x} = \sqrt[6]{9-x^2}$
 $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 12 = 0$

Exercice 7 : Calculer les limites suivantes

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - 1}{x}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{\sin x}$
 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x+63} - 4}$; 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{x}$; 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x} - 1}$
 7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - \sqrt{x+2}}{x-2}$; 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{2-x}$; 9) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x^3-2}}{\sqrt[3]{x+56} - 4}$
 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3-x} - x$; 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \cdot \sqrt[6]{x}$; 12) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt[3]{2-x}}{x-2}$
 13) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x-3} - \sqrt[3]{3x-5}}{\sqrt{7x+2} - \sqrt{5x+6}}$; 14) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(4-x)\sqrt[3]{x-2}}{x-2}$; 15) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{1-x^3} + x + 1$

