GENERALITES SUR LES FONCTIONS 1SM

Filali jaouad

Exercice1

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$

1) montrer que f admet sur $]0,+\infty[$ un extremum en $\dfrac{1}{2}$ dont on préciseras la nature

2) a) montrer que $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$ $f(x) - f(y) = (x-y)\left(4(x+y) - \dfrac{1}{xy}\right)$

b) étudier les sens de variations de f sur les intervalles $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$, $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ et $]-\infty,0[$

c) en déduire que $\left(\forall x \in \left[\dfrac{1}{3},1\right]\right)$ $f(x) \in [3,5]$

3) on pose $g(x) = 4x|x| + \dfrac{1}{x}$ étudier la parité de g puis étudier les variations de g

Exercice2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x|x|}{x^2+1}$

1) étudier la parité de f et montrer que $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right)$ $0 \le f(x) < 1$

2) en déduire que f est bornée

3) a) montrer que pour tous x ; y de $\mathbb{R}^+$ $x \neq y$ on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{2(x+y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$

b) étudier le sens de variation de f su $\mathbb{R}^+$ puis déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^-$

Exercice3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x$

1) montrer que pour tous x ; y de $\mathbb{R}$ et $x \neq y$ on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = x^2 + y^2 + xy - 3$

2) étudier le sens de variation de f sur $[1,+\infty[$; $]-\infty,-1]$ et $[-1,1]$

3) soient $a_n,\ldots\ldots,a_2,a_1$ des réels de $\mathbb{R}^+$ و tels que : $a_1 \times a_2 \times \ldots\ldots \times a_n = 1$

Montrer que $\left(2+a_1^3\right)\left(2+a_2^3\right)\times\ldots\ldots\times\left(2+a_n^3\right) \ge 3^n$

4) soit h la fonction telle que : $h(x) = (x-1)\sqrt{x+2}$

Vérifier que $f\left(\sqrt{x+2}\right) = h(x)$ en déduire les variations de h sur $[-1,+\infty[$ et $[-2,-1]$

Exercice4

soient a , b et c des réels de $\mathbb{R}^+$
on considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - (b+c)x + b^2 + c^2 - bc$

1) dresser le tableau de variations de f

2) en déduire que $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ac$