EXERCICE 1 :

on considére la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{x^2}{x^2+2}$

1 – ***monter que la fonction f est la composée de deux fonctions classiques puis etudier les variations de f***

2 – ***Determiner*** $f([1,2])$

3 – ***Monter que f est minorée sur*** $\mathbb{R}$

4 – ***Monter que*** $f(\mathbb{R}) =]-1,0]$

EXERCICE 2 :

En utilisant la composée de deux fonctions de références étudier les variations de la fonction h dans les cas suivants :

1 – $h(x) = \dfrac{-2\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}-1}$; 2 – $h(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{2x^2-4x+3}$

3 – $h(x) = \dfrac{x^3-1}{2x^3-2}$; 4 – $h(x) = x - 2\sqrt{x-1}+4$

EXERCICE 3 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+3}$

1 – ***Déterminer*** D_f

2 – ***Monter que f admet un minimum***

3 – ***monter que la fonction f est la composée de deux fonctions classiques puis etudier les variations de f***

EXERCICE 4 :

Les meme questions de l'exercice 3 pour la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-2x+6}{2x^2-4x+4}$

EXERCICE 5

On consdère les fonctions f et g ***définies par :*** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$ et $g(x) = 1 + x^2$

1) ***Calculer*** $f(g(x))$

2) ***Montrer que*** $(\forall x \in [1,+\infty[)\ f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{1-(\dfrac{2}{x}-1)^2}$

3) ***En déduire la monotonie de la fonction h définie par*** $h(x) = \dfrac{|x|}{1+x^2}$

EXERCICE 6

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$

1) ***Montrer que*** $\forall x \in]-1,+\infty[\quad f(x) = u(x+1)$ où u est ***une fonction que l'on déterminera.***

2) ***En déduire la monotonie de f sur]-1,*** $+\infty[$

3) ***Montrer que f n'admet pas de minimum.***

EXERCICE 7

On considère la fonction f définie par $f(x)\ \dfrac{x^3+x^2+2x+3}{x^2+x+3}$

1) ***Montrer que*** $(\forall x \in IR)\quad f(x) > x-1$

2) ***En déduire que f n'est pas majorée.***

EXERCICE 8

On considère la fonction f définie par : $f\ (x)\ \frac{x^2+x+1}{2x-1}$

Montrer que f n'est pas majoré.(Utiliser un raisonnement par l'absurde).

EXERCICE 9 :

Soint f et g deux fonctions définies sur $[0,+\infty[$ ***par :*** $f(x)=\frac{x-E(x)}{\sqrt{x}}$ ***et*** $g(x)=x-E(x)$

$1-$ ***Montrer que g est majorée par*** 1 ***et minorée par*** 0

puis en déduire que $f(x)\leq\frac{1}{\sqrt{E(x)}}$ ***pour tout*** $x\in\,]0,+\infty[$

$2-$ ***En déduire que f est majorée par*** 1

$3-$ ***Verifier que*** $Min(f(x))=0$

EXERCICE 10 :

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ ***par*** $f(x)=E(x)^2-2E(x)$

$1-$ ***Montrer que*** $\forall x\in\mathbb{R}^+\ E(x)^2\leq E(x^2)$

$2-$ ***Montrer que*** $Min(f(x))=-1$

$3-$ ***On pose*** $x=n+\frac{1}{2}$ ***avec*** $n\in\mathbb{N}$

a − Ecrire f (x) en fonction de n

b − En deduire que f est non majorée sur $\mathbb{R}^+$

EXERCICE 11 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^2+\left[\frac{1}{1-E(x^2)}\right]$

$1-$ ***Determiner*** D_f ***et montrer que f est une fonctin paire***

$2-$ ***Ecrire f (x) sans le symbole de la partie entière***

Exercice 12 :

on pose $f(x)=x(|x|-1)$ ***et*** $g(x)=\sqrt{x+1}$

$1-$ ***Determiner*** D_f ***et montrer que f est une fonctin impaire***

$2-$ ***Etudier les variations des foctions f et g***

$3-$ ***Sur le meme plan muni d'un repere orthonormé*** $(o,\vec{i},\vec{j})$ ***construire*** (C_f) ***et*** (C_g)

$4-$ ***a − Montrer graphiquement que l'equation*** $f(x)=g(x)$ ***admet une seule solution*** α ***sur l'intervalle*** $[0,+\infty[$

− b − Monter que $1<\alpha<2$

$5-$ ***soit*** $n\in\mathbb{N}^*$ ***et on pose*** $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}f(k)$ ***monter que*** $S_n=\frac{n(n^2-1)}{3}$

EXERCICE 13

On considère la fonction f définie par $f\ (x)=\sqrt{2}\ x-\ \mathrm{E}(\sqrt{2}\ x)$

1) Montrer que f est périodique de période $\frac{1}{\sqrt{2}}$

a) On considère g la restriction de f sur $\mathbb{Z}$

$$g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$$
$$x\to g(x)=\sqrt{2}x-E(\sqrt{2}x)$$

b) Montrer que g est injective.

c) On considère l'équation $g\ (x)=1\ avec\ x\ \in\ \mathbb{Z}$

- **Montrer que 0 n'est pas solution de l'équation.**
- **Est-ce que l'équation admet des solutions dans** $\mathbb{Z}$?

Est-ce que g est surjective ? Justifier