2bac pc 1,2 **Prof : Filali Jaouad**

Ex 1 On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $(\forall n \in) u_{n+1} = \frac{n+2}{2n+2} u_n$; On pose $V_n = \frac{U_n}{n+1}$

1°) Calculer U_1 et U_2

2°) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$

3°) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{n+2}{2n+2} \leq 1$ en déduire la monotonie de (u_n) est ce que (u_n) est convergente

4°) a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n .puis Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

c) Calculer $S_n = \sum^{n-1} \frac{U_i}{i}$

Ex 2 On considère la suite (u_n) définie par : $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+2} = \frac{2}{5} u_{n+1} - \frac{1}{25} U_n$

On pose $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{5} U_n$ et $W_n = 5^n U_n$

1°) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ puis calculer V_n en fonction de n .

2°) a) Montrer que (W_n) est arithmétique de raison 5

b) Ecrire W_n puis U_n en fonction de n

3°) a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 < U_{n+1} \leq \frac{2}{5} U_n$

b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 0 < U_n \leq (\frac{2}{5})^{n-1}$ puis calculer $\lim U_n$

Ex 3 : On considère (u_n) définie par : $U_0 = \frac{5}{2}$; $U_{n+1} = \frac{1}{3}(U_n + n^2)$ on pose $V_n = U_n - \frac{n^2-3n+3}{2}$

1°) a) Montrer que (V_n) est géométrique

b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n

2°) On pose $S_N = \sum_{i=0}^{n} V_i$ et $T_n = \sum_{i=0}^{i=n} U_i$ Calculer S_n et T_n en fonction de n **N.B** $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

Ex 4 Soit la suite (U_n) / $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{1+4U_n}{7-2U_n}$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2}$ $\left(R_q :\ U_{n+1} = \frac{15}{7-2U_n} - 2\right)$

2) (U_n) est croissante et déduire que (U_n) converge .

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \left(\frac{1}{2} - U_{n+1}\right) - \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2} - U_n\right) = \frac{-5(\frac{1}{2}-U_n)^2}{3(7-2U_n)}$

b) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2} - U_{n+1} \leq \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2} - U_n\right)$ et que $0 \leq \frac{1}{2} - U_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n$

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

4) Soit (V_n) / $V_n = \frac{2U_n-1}{U_n-1}$ Montrer que (V_n) est une S.G / $q = \frac{5}{6}$

Ecrire V_n puis U_n en fonction de n et calculer $\lim U_n$

Ex 5 On considère la fonction définie $[1, +\infty[: f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 7} + x - 2$

1) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[:\ f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+7}} + 1$ Et déduire que f est croissante sur $[2, +\infty[$

2) a) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[: f(x) - x = \frac{(x-1)(x-3)}{\sqrt{x^2-4x+7}+2}$

b) Déduire que $\forall x \in [1; 3]\ f(x) \leq x$

3) On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \leq U_n \leq 3$

b) Montrer que (U_n) est décroissante .

Justifier que (U_n) est convergente et calculer $\lim U_n$

Exe6

Première partie : Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$
et soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormal $(o;\vec{i};\vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\| = 2cm$

1] a) Vérifier que : $(\forall x \in]-\infty;0[)$ $\quad f(x) = \frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$

b) Vérifier que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$ $\quad f(x) = \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1$

c) En déduire les deux branches infinies de la courbe (C)

2] a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f'(x) = \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3] a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) - x = \frac{-x^2(x+1)}{(1+\sqrt{x^2+1})\sqrt{1+x^2}}$

b) En déduire la position relative de la courbe (C) et de la droite (Δ) d'équation $y = x$

c) Vérifier que (Δ) est tangente à (C) en son point d'abscisse 0

d) Construire (C)

Deuxième partie :

Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $]-\infty;1]$

1] Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur intervalle J que l'on précisera.

2] Donner le tableau de variations de g^{-1} .

3] Vérifier que g^{-1} est dérivable en -1 puis calculer $(g^{-1})'(-1)$.

4] Construire la courbe de g^{-1} dans le même repère (utiliser une couleur différente) .onstruire la courbe .

Troisième partie :

On considère la suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} = f(u_n)$

1] Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $-1 < u_n < 0$

2] Montrer que (u_n) est une suite décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

3] Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exer7 $\quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ $\qquad x \in I = [4,9]$

1°) Montrer $(\forall x \in I)$ $\quad f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}$ En déduire que f croissante sur I , puis calculer f(I)

2°) Désordre dans I l'équation f(x) = x

3°) On considère la suite (u_n) définie par : $u_o = 9$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Calculer u_1

b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $4 \le u_n \le 9$

c) Montrer que (u_n) est croissance et en déduire qu'elle est convergente .

d) calculer $\lim u_n$