Série 12 Exercices | **Transformations dans le plan** | **Année 2022-2023**

TC sc Biof

Exercice1 *ABCD étant un trapèze tel que* $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ *et I milieu de* $[DC]$ *et E tel que ACED un parallélogramme*

et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

1) *Déterminer les images des points A et C par t*

2) *Montrer que* $t(B)=I$

3) *En déduire que* $(IE)//(BC)$

Exercice2 : *ABCD étant un parallélogramme*

e t F tel que $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

La droite parallèle à (AD) passant par F coupe respectivement Les droites (AB) et (DC) en I et H .

La droite parallèle à (AB) passant par F coupe respectivement Les droites (AD)et (BC) en G et E .

1) *Construire une figure convenable et montrer que* $\overrightarrow{FC}=-2\overrightarrow{FA}$

2) *Soit h l'homothétie de centre F et qui transforme A et C .*

a) *montrer que le rapport de h est -2*

b) *montrer que l'image par h de la droite (AD) est (BC)*

3) a) *Montrer que* $FI=2FH$ b) *En déduire que* $h(I)=H$

4) *Déterminer* $h(G)$ *et en déduire que* $\overrightarrow{HE}=-2\overrightarrow{IG}$

et montrer $(HE)//(IG)$

Exercice3 : *ABCD étant un carré de coté 6 et E et F deux points de* $[AB]$ *tels que* $\overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{BA}$ *sont de même sens et*

EFGH un carré de coté 4 et $\overrightarrow{EH}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *sont de même sens*

et O le point de rencontre de (BG) *et* (CF)

1) *Construire une figure convenable*

2) *Soit h l'homothétie de centre O et transforme B en G*

a) *montrer que* $h(C)=F$

b) *Déterminer le rapport de h*

3) a) *Montrer que* $\overrightarrow{GH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

b) *Déterminer h(A)* c)) *Déterminer h(D)*

4) *En déduire que les droites* (AH) , (BG) (CF) *et* (ED) *sont concourantes*

Exercice4 : *ABCD étant un parallélogramme*

et I un point tel que $\overrightarrow{DI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

et E le point de rencontre des droites (AI) *et* (DB)

F le point de rencontre des droites (AI) *et* (BC)

Soit h l'homothétie de centre E qui transforme D en B

1) *Construire une figure convenable*

2) *Montrer que* $h(AI)=(AI)$ *et* $h(DC)=(BA)$

3) *Montrer que* $h(I)=A$.

4) *Déterminer le rapport de l'homothétie h .*

5) a) *Montrer que* $h(AD)=(BC)$

b)*Montrer que* $h(A)=F$

c) *En déduire que* $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$.

Exercice1 ABCD étant un trapèze tel que $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ et I milieu de $[DC]$

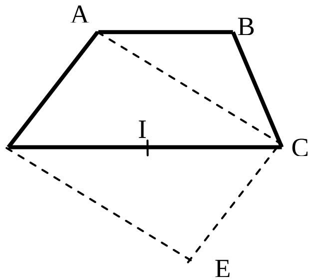
et E tel que $ACED$ un parallélogramme

et t la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

1) Déterminer les images des points A et C par t

2) Montrer que $t(B) = I$

3) En déduire que $(IE)//(BC)$



-------------------- **Correction Ex1** --------Fig1

1) le vecteur de translation est $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ donc $t(A) = D$ et puisque $ACED$ est un parallèlogramme $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD}$ donc $t(C) = E$

2) I milieu de $[DC]$ donc $\overrightarrow{DC} = 2.\overrightarrow{IC}$ c.à.d. $2.\overrightarrow{IC} = 2.\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DI}$ donc c.à.d. $ABID$ est un parallèlogramme donc $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AD} = \vec{u}$ c.à.d. $t(B) = I$

3) Puisque $t(B) = I$ et $t(C) = E$

alors $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IE}$ donc $(BC)//(IE)$

Exercice2 : ABCD étant un parallélogramme et t F tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

La droite parallèle à (AD) passant par F coupe **respectivement Les droites (AB) et (DC) en I et H .**

La droite parallèle à (AB) passant par F coupe respectivement Les droites (AD)et (BC) en G et E .

1) Construire une figure convenable et montrer que $\overrightarrow{FC} = -2\overrightarrow{FA}$

2) Soit h l'homothétie de centre F et qui transforme A et C .

a) montrer que le rapport de h est -2

b) montrer que l'image par h de la droite (AD) est (BC)

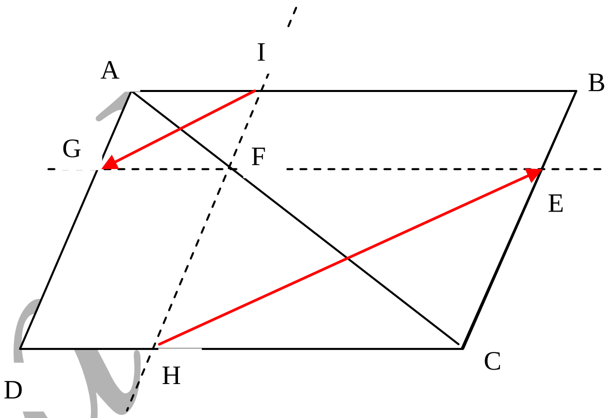
3) a) Montrer que $FH = 2FI$ b) En déduire que $h(I) = H$

4) Déterminer $h(G)$ et en déduire que $\overrightarrow{HE} = -2\overrightarrow{IG}$

et montrer $(HE)//(IG)$

Correction. Ex2

1)Fig2



$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 3\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}$ donc $\overrightarrow{FC} = -2.\overrightarrow{FA}$

2) h l'homothétie de centre F qui transforme A en C

a) $h(A) = C$ signifie $\overrightarrow{FC} = k.\overrightarrow{FA}$

et puisque $\overrightarrow{FC} = -2\overrightarrow{FA}$ alors $k.\overrightarrow{FA} = -2\overrightarrow{FA}$

donc $k = -2$ donc le rapport de h est $k = -2$

b) On sait que l'image d 'une droite par une homothètie est une droite qui lui est parallèle et puisque $h(A) = C$ alors l'image de (AD) est une droie parallèle à (AD) et passat par C et puisque ABCD est un parallèlogramme alors cette droite est la droite (CB)

$$h(AD) = (BC)$$

3) a) On a (IA)//(HC) et A,F et C alignés I,F et H alignés d'après le Th de Thalès on a

$\frac{FH}{FI} = \frac{FC}{FA} = 2$ car $\overrightarrow{FC} = -2\overrightarrow{FA}$ donc $\frac{FH}{FI} = 2$ c.à.d. $FH = 2FI$

NB: On peut aussi utiliser la projection p sur (IH) parallèlement à (AB) p(A)=I et p(C)=H et p(F)=F et la conservation du du coefficient de colinéarité et puisque $\overrightarrow{FC} = -2.\overrightarrow{FA}$ alors $\overrightarrow{FH} = -2.\overrightarrow{FI}$ d'où $FH = 2FI$

b) On a $FH = 2FI$ et $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FI}$ sont colinéaires de sens contraires donc $\overrightarrow{FH} = -2\overrightarrow{FI}$ c.à.d. $h(I) = H$

4) On peut utiliser le Th de Thalès comme dans 3) a) à vous de voir ça !?

ou encore utiliser la propriété des projections comme dans 3) a)

Autre façon . On a h(AD)=(CB) et h(EF)=(EF) Car (EF) passe par le centre F de h

et on a (AD) et (EF) se coupent en G

(CB) et (EF) se coupent en E donc h(G)=E

On a h(I)=H et h(G)=E

et d'après la propriété caractéristique del'homothétie

alors $\overrightarrow{HE} = -2.\overrightarrow{IG}$ et par suite $(HE)//(IG)$

Exercice3 : $ABCD$ étant un carré de coté 6 et E et F deux points de $[AB]$ tels que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont de même sens et $EFGH$ un carré de coté 4 et $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de même sens et O le point de rencontre de (BG) et (CF)

1) Construire une figure convenable

2) Soit h l'homothétie de centre O et transforme B en G

a) montrer que $h(C)=F$ b) Déterminer le rapport de h

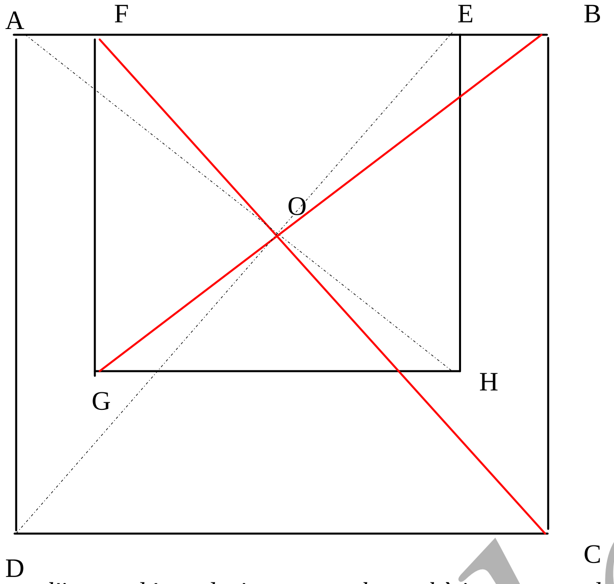
3) a) Montrer que $\overrightarrow{GH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

b) Déterminer h(A) c)) Déterminer h(D)

4) En déduire que les droites (AH) , (BG) (CF) et (ED) sont concourantes

Correction Ex3

1) Fig3



2) a) sait que l'image d 'une droite par une homothètie est une droite qui lui est parallèle et puisque $h(B)=G$ alors l'image de (BC) est une droie parallèle à (BC) et passat par G et puisque $(BC)//(EH)//(FG)$ alors $h(BC)=(GF)$

On a $h(BC)=(GF)$ et $h(FC)=(FC)$ car (FC) passe par le centre O de h

(BC) et (FC) se coupent en C

(FG) et (FC) se coupent en F donc $h(C)=F$

b) On a $h(C)=F$ et $h(B)=G$ alors $\overrightarrow{FG}=k.\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont de sens contraires

$$\frac{FG}{CB}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \text{ c.à.d. } FG=\frac{2}{3}CB$$

$\overrightarrow{FG}=-\frac{2}{3}.\overrightarrow{CB}$ car $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont de sens contraires

et on a $\overrightarrow{FG}=k.\overrightarrow{CB}$ donc $k=-\frac{2}{3}$

3) a) On a $GH=4$ et $AB=6$ donc $\frac{GH}{AB}=\frac{2}{3}$

alors $GH=\frac{2}{3}.AB$ et puisque $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens

alors $\overrightarrow{GH}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}$

b) On $\overrightarrow{GH}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{AB}$ c.à.d. $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{AO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OH}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{AO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OG}$ or $\overrightarrow{OG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ car $h(B)=G$

donc $\overrightarrow{OH}=-\frac{2}{3}.\overrightarrow{OA}$ c.à.d. $h(A)=H$

c) On $\overrightarrow{FE}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{DC}$ c.à.d. $\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{DO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{DO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF}$ or $\overrightarrow{OF}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$ car $h(C)=F$

donc $\overrightarrow{OE}=-\frac{2}{3}.\overrightarrow{OD}$ c.à.d. $h(D)=E$

4) On a $h(A)=H$ donc $O\in(AH)$

$h(B)=G$ donc $O\in(BG)$

$h(C)=F$ donc $O\in(CF)$

$h(D)=E$ donc $O\in(DE)$

Exercice4 : $ABCD$ étant un parallélogramme et I un point tel que $\overrightarrow{DI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

et E le point de rencontre des droites (AI) et (DB)

F le point de rencontre des droites (AI) et (BC)

Soit h l'homothétie de centre E qui transforme D en B

1) Construire une figure convenable

2) Montrer que $h(AI)=(AI)$ et $h(DC)=(BA)$

3) Montrer que $h(I)=A$.

4) Déterminer le rapport de l'homothétie h .

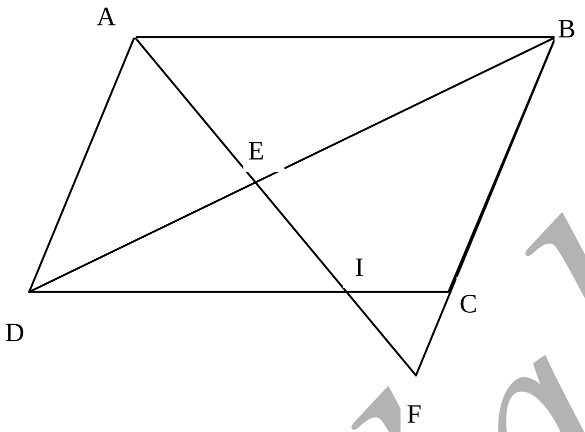
5) a) Montrer que $h(AD)=(BC)$

b)Montrer que $h(A)=F$

c) En déduire que $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$.

---------------------------------- **Correction Ex4** ----------------------------------

1) Fig4



2) $h(AI)=(AI)$ car (AI) passe par le centre E de l'homothétie h

$h(DC)$ est une droite parallèle à (DC) et puisque $h(D)=B$

$h(DC)$ est parallèle à (DC) et passe par B

$h(DC)=(BA)$

3) On a $h(DC)=(BA)$ et $h(AI)=(AI)$

et on a (DC) et (AI) se coupent en I

(BA) et (AI) se coupent en A

donc $h(I)=A$

4) On a $h(D)=B$ et $h(I)=A$

donc $\overrightarrow{BA}=k.\overrightarrow{DI}$ et puisque $\overrightarrow{DI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$ c.à.d. $\overrightarrow{DI}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$

donc $\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{4}.k.\overrightarrow{CD}$ or $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ c.à.d. $\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{4}.k.\overrightarrow{BA}$

$-\frac{3}{4}.k=1$ donc $k=-\frac{4}{3}$

5) a) $h(AD)$ est une droite parallèle à (AD) et puisque $h(D)$ =B

$h(AD)$ est parallèle à (AD) et passe par B donc c'est (BC)

$h(AD)=(BC)$

b)) On a $h(AD)=(BC)$ et $h(AF)=(AF)$

et on a (AD) et (AF) se coupent en A

(BC) et (AF) se coupent en F

donc $h(A)=F$

Autre façon p la projection sur (AI) parallèlement à (DA)

p(D)=A , p(E)=E , p(B)=F or h(D)=B , $\overrightarrow{EB}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{ED}$

et puisque p conserve le coefficient de colinéarité

alors on a $\overrightarrow{EF}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{EA}$ c.à.d. h(A)=F

c) On a

$h(I)=A$ et $h(A)=F$

$\overrightarrow{AF}=-\frac{4}{3}.\overrightarrow{IA}$ c.à.d. $\overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}.\overrightarrow{AI}$