

INTÉGRATION EN 2 BAC

I. Détermination de primitives

Exercice 1 : Vérifier que F est une primitive de f sur \mathbf{R} avec :

$$1. \ f(x) = \frac{1}{1+e^x} \quad F(x) = x - \ln(1+e^x). \quad 2. \ f(x) = \sqrt{e^x} \quad F(x) = 2\sqrt{e^x}.$$

Exercice 2 : Primitives de sommes de fonctions usuelles

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 & \text{sur } I = \mathbf{R} & f_2(x) = 6x^5 + 4x^3 - 1 \quad \text{sur } I = \mathbf{R} \\ f_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1 & \text{sur } I = \mathbf{R} & f_4(x) = 4x^7 - x^6 - \frac{2}{3}x - 5 \quad \text{sur } I = \mathbf{R} \\ f_5(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 9 & \text{sur } I =]0; +\infty[& f_6(x) = \sin x - 3\cos x \quad \text{sur } I = \mathbf{R} \\ f_7(x) = \frac{2}{x} & \text{sur } I = \mathbf{R}^* & f_8(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - e^x \quad \text{sur } I = \mathbf{R}^* \end{array}$$

Exercice 3 : Primitives de $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{u^2}$ et $u'e^u$

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} & \text{sur } I = \mathbf{R} & f_2(x) = \frac{4x^3}{(x^4 + 1)^2} \quad \text{sur } I = \mathbf{R} \\ f_3(x) = 3x e^{3x^2 + 1} & \text{sur } I = \mathbf{R} & f_4(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \quad \text{sur } I = \mathbf{R} \\ f_5(x) = \frac{e^x}{e^x + 3} & \text{sur } I = \mathbf{R} & f_6(x) = \cos x e^{\sin x} \quad \text{sur } I = \mathbf{R} \end{array}$$

Exercice 4 :

Déterminer toutes les primitives sur \mathbf{R} de la fonction f , définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$.

Exercice 5 :

1. Déterminer la primitive sur \mathbf{R} de la fonction cosinus qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer la primitive de la fonction f , définie sur \mathbf{R} par $f(x) = e^{3x+1}$, qui s'annule en $x = -1$.
3. Déterminer la primitive de la fonction f , définie sur \mathbf{R} par $f(x) = xe^{-x^2}$, dont la courbe représentative passe par le point $A(\sqrt{\ln 2}, 1)$.

Exercice 6 : On considère la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 4}{x - 2}$.

- a) Écrire f sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$.
- b) Déterminer alors une primitive de f .

II. Calcul d'intégrales

À l'aide des primitives

Exercice 7 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^1 (t^2 + 4t + 3) dt$

b) $\int_1^2 \left(\frac{1}{2t} - \frac{3}{t^2} \right) dt$

c) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx$

d) $\int_1^2 \sqrt{t} dt$

e) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx$

f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

Exercice 8 : Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\ln 3} e^{-t} dt$

b) $\int_0^2 \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$

c) $\int_0^{-1} \frac{dt}{\sqrt{1-2t}}$

d) $\int_1^2 \frac{dx}{3x+2}$

e) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln t}{t} dt$

f) $\int_0^1 \sqrt{2-t} dt$

g) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 1} dt$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt$

i) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos(3x) dx$

Exercice 9 : Soit f la fonction définie sur $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$ par : $f(x) = \frac{8x^2 - 4}{4x^2 - 1}$.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que : $\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$, $f(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{2x-1}$.

2. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{4}} f(x) dx$.

Exercice 10 :

Soient a et b deux réels.

On considère les fonctions f et F définies sur \mathbb{R} par $f(x) = (x-1)e^{-x}$ et $F(x) = (ax+b)e^{-x}$.

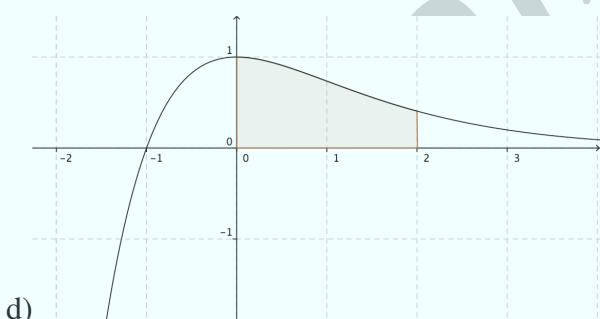
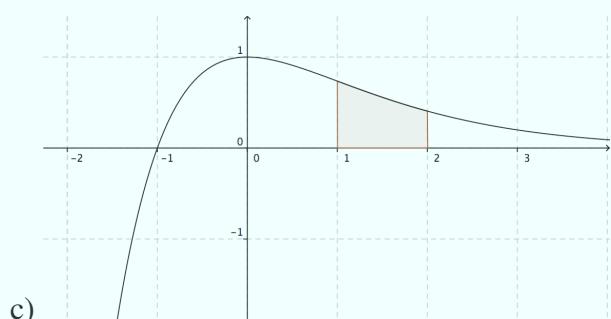
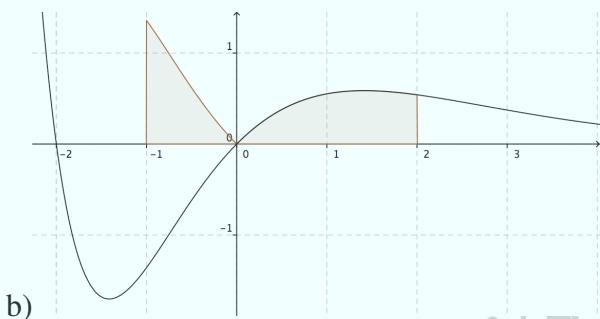
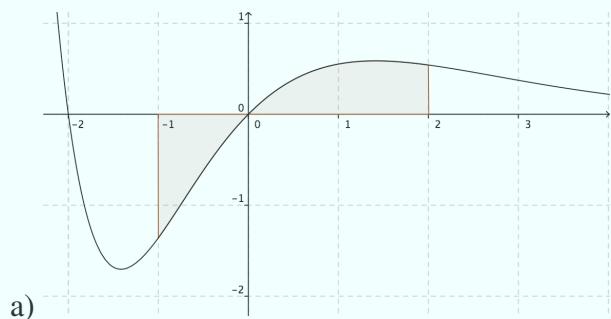
1. Déterminer les réels a et b tels que F soit une primitive de f .

2. En déduire $\int_0^{\ln(3)} (x-1)e^{-x} dx$

III. Calcul d'aires

Exercice 11 :

Associer chaque intégrale au schéma qui lui correspond (pour cet exercice, les aires des parties du plan situées sous l'axe des abscisses sont comptées négativement).



$$1. \int_{-1}^2 f(x) dx$$

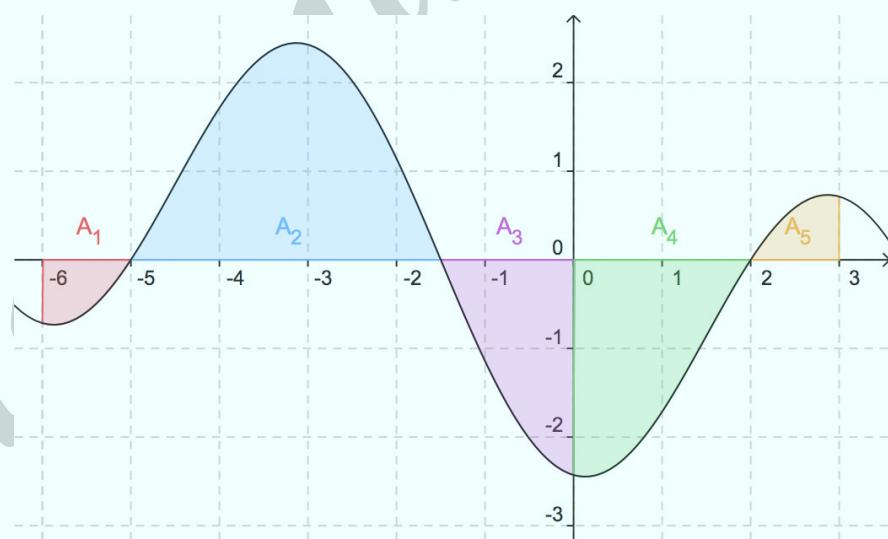
$$2. \int_0^2 f(x) dx$$

$$3. \int_{-1}^1 |f(x)| dx$$

$$4. \int_1^2 f(x) dx$$

Exercice 12 :

On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction f .



On suppose connues les aires A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 .

a) Avec ces valeurs, exprimer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-6}^{-1.5} f(x) dx, I_2 = \int_{-1.5}^2 f(x) dx \text{ et } I_3 = \int_0^3 f(x) dx.$$

b) À l'aide d'intégrales, exprimer la somme $A_1 + A_2 + A_3$.

Exercice 13 :

Les aires A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6 sont connues.

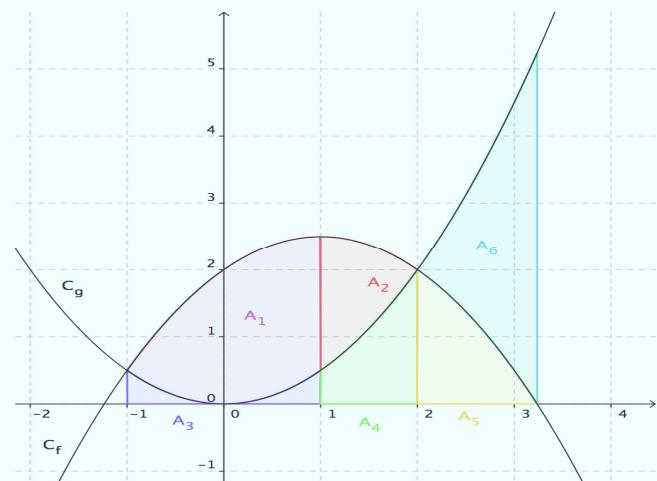
- a) Exprimer les intégrales suivantes à l'aide de ces valeurs.

$$I_1 = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad I_2 = \int_{-1}^3 g(x) dx$$

$$I_3 = \int_{-1}^3 [f(x) - g(x)] dx$$

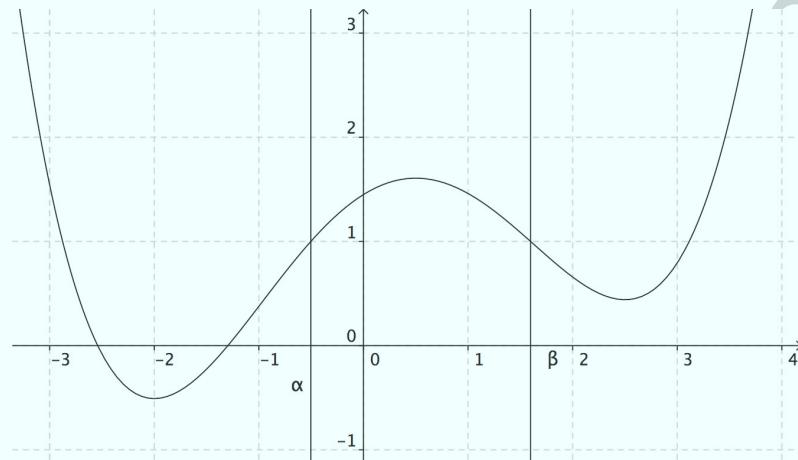
$$I_4 = \int_{-1}^2 |f(x) - g(x)| dx$$

- b) Exprimer à l'aide d'intégrales la somme $A_4 + A_5$.



Exercice 14 :

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f et deux droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = \beta$.



- a) Colorier en rouge la partie du plan dont l'aire est donnée par $\int_2^3 f(x) dx$

- b) Colorier en bleu la partie du plan dont l'aire est donnée par $\int_{-2}^1 |f(x)| dx$

- c) Colorier en vert la partie du plan dont l'aire est donnée par $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - 1| dx$

Exercice 15 :

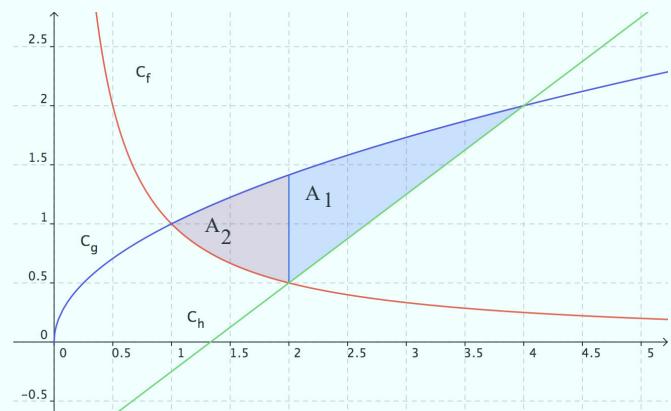
On a tracé dans le repère ci-contre les courbes représentatives des fonctions f , g et h définies

par : $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = \frac{3}{4}x - 1$.

- a) Exprimer avec l'aide des intégrales l'aire rouge A_2 et la calculer.

$$\text{b) Calculer } A_1 = \int_2^4 \left(\sqrt{x} - \frac{3}{4}x + 1 \right) dx.$$

- c) En déduire l'aire coloriée sur la figure en unités d'aire.

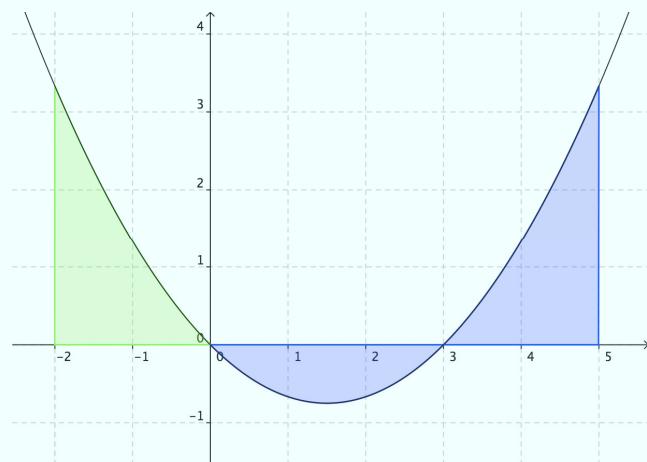


Exercice 16 :

1. On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x$.

a) Exprimer avec une intégrale l'aire verte V . Calculer V .

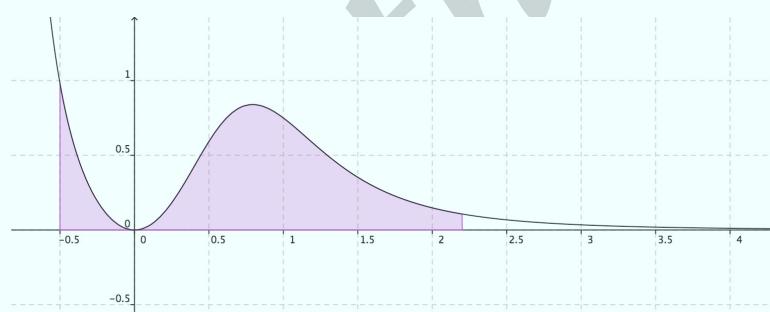
b) Exprimer avec une intégrale l'aire bleue B . Calculer B .



2. On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction $g(x) = \frac{3x^2}{(x^3 + 1)^2}$.

m désigne un réel strictement positif et $A(m)$ est l'aire de la partie du plan située entre les droites d'équation $x = -\frac{1}{2}$, $x = m$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction g .

Cette aire est fonction de m .

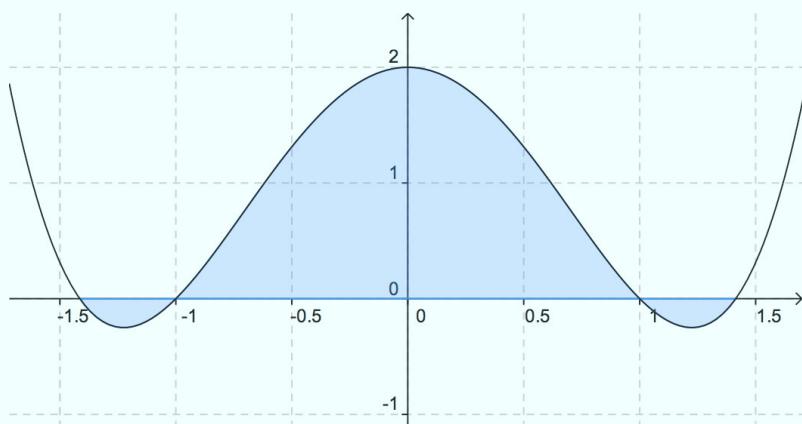


Calculer l'aire $A(m)$ et déterminer la limite de $A(m)$ lorsque m tend vers l'infini.

Exercice 17 :

Soit la fonction $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ définie sur $[-2;2]$, représentée ci-dessous dans un repère orthogonal. Les unités graphiques sont 2 cm sur l'axe (Ox) et 1 cm sur l'axe (Oy).

Calculer l'aire, en cm^2 , du domaine D coloré.



IV. Intégrales et inégalités

Exercice 18 : On pose $I = \int_0^1 \frac{e^{-t^2}}{1+t} dt$. Montrer que $I \geq 0$.

Exercice 19 : Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$. On note $I = \int_0^1 f(x)dx$.

a) Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$, $0 \leq f(t) \leq t^2$.

b) En déduire que $0 \leq I \leq \frac{1}{3}$.

Exercice 20 :

a) Montrer que, pour tout réel strictement positif t , $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , $\int_1^n \frac{1}{1+t^2} dt \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 21 :

1. On pose $I = \int_0^1 x^2 \ln(x+1) dx$. Démontrer que $0 \leq I \leq \frac{\ln 2}{3}$.

2. On pose $I = \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx$. Démontrer que $0 \leq I \leq 1 - \frac{1}{e}$.

Exercice 22 : Soit F la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$.

Montrer que, pour tout réel x positif, $F(x) \leq x$.

Exercice 23 : On connaît le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[0;5]$:

x	0	2	3	5
f	-1	2	1	2

Donner un encadrement de chacune des intégrales suivantes : $I = \int_0^2 f(x)dx$; $J = \int_2^5 f(x)dx$.

V. Suites et intégrales

Exercice 24 : Pour tout entier naturel n , on considère la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

- Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
- Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
- Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

Exercice 25 : Pour tout n de \mathbb{N} , on définit $x_n = \int_0^1 t^n \cos t dt$.

- Montrer que, pour tout n de \mathbb{N} , la suite (x_n) est à termes positifs.
- Étudier le sens de variation de la suite (x_n) .
- Que peut-on en déduire pour la suite (x_n) ?

Exercice 26 : Pour tout n de \mathbb{N} , on définit $y_n = \int_0^1 t^n \sin t dt$.

- Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $0 \leq y_n \leq \frac{1}{n+1}$.
- En déduire la limite de (y_n) .

Exercice 27 : Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

- Montrer que, pour tout x de $[1; e]$ et pour tout entier n non nul, $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.
- En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

Exercice 28 : Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_1^n e^{-t} dt$.

Montrer que la suite (I_n) est croissante.

Exercice 29 : Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n non nul :

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

VII. Intégration par parties

Théorème

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , dont les dérivées u' et v' sont continues sur I .

Pour tous réels a et b de I , $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$.

Preuve

- u et v sont dérivables sur I donc uv est dérivable sur I , et $(uv)' = u'v + uv'$, donc $uv' = (uv)' - u'v$.
- u, v, u' et v' sont continues sur I , donc uv' , $u'v$ et $(uv)'$ le sont aussi alors

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v'(x)dx &= \int_a^b [(uv)'(x) - u'(x)v(x)]dx \\ &= \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx \\ &= [uv(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx\end{aligned}$$

Exemples

- Calculer $J = \int_0^\pi x \sin x dx$
- Soit x un réel strictement positif. Calculer $\int_1^x \ln t dt$.
- Calculer $J = \int_0^\pi x e^x dx$.
- On note $I = \int_0^\pi e^x \sin x dx$ et $J = \int_0^\pi e^x \cos x dx$.
 - Démontrer que $I = -J$ et que $I = J + 1 + e^\pi$.
 - En déduire les valeurs exactes de I et de J .

Exercice 30 : À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$ b) $\int_0^2 (2-x)e^x dx$ c) $\int_1^e \ln(x) dx$

Exercice 31 :

À l'aide d'une intégration par parties, donner une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$.

Exercice 32 : On considère les intégrales $I = \int_0^\pi e^x \sin(x) dx$ et $J = \int_0^\pi e^x \cos(x) dx$.

- En intégrant I puis J par parties, démontrer que $I = -J$ puis que $I = J + e^\pi + 1$.
- Déterminer I et J par résolution d'un système.

Exercice 33 : Soit n un entier naturel et $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

- Calculer I_1 .
- Établir une relation entre I_{n+1} et I_n .
- En déduire I_3 .

Exercice 34 : À l'aide d'une double intégration par parties, calculer

a) $I = \int_0^3 x^2 e^{-2x} dx$ b) $I = \int_0^\pi x^2 \cos(x) dx$.