Niveau : 2BAC-SP-SVT-F Géométrie dans l'espace (Examens nationaux) : 2023-2024 :

Exercice 1 : (3 $points$) — Examen national 2019 Session normale

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct$(\boldsymbol{O};\vec{\boldsymbol{\imath}};\vec{\boldsymbol{\jmath}};\vec{\boldsymbol{k}})$, on considère les points $\boldsymbol{A}(\mathbf{1};-\mathbf{1}\,;-\mathbf{1})$ et $\boldsymbol{B}(\mathbf{0};-\mathbf{2}\,;\mathbf{1})$ et $\boldsymbol{C}(\mathbf{1};-\mathbf{2}\,;\mathbf{0})$.

1) a) Montrer que **les points A,B et C ne sont pas alignes**

b) En déduire que $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Soit(S) la sphère d'équation : $\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{y^2}+\boldsymbol{z^2}-\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y}-\mathbf{2}\boldsymbol{z}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$.

Montrer que le centre de la sphère (S) est $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{2};-\mathbf{1}\,;\mathbf{1})$ et que son rayon est $R=\sqrt{5}$.

3) a) Calculer $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\Omega};(\mathbf{ABC}))$ la distance du point Ω au plan(ABC).

b) En déduire que le plan(ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle $(\boldsymbol{\Gamma})$,

(la détermination du centre et du rayon de$(\boldsymbol{\Gamma})$ n'est pas demandée)

Exercice 2 : (3 $points$) — Examen national 2017 Session normale

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$,$\vec{k}$) on considère le plan (P)

passant par le point A(0 , 1 , 1) et dont $\vec{u}$ (1, 0, -1) est un vecteur normal et la sphère (S)

de centre le point Ω(0 , 1 , -1) et de rayon $\sqrt{2}$

1) a) Montrer que $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$ est une équation cartésienne du plan (P)

b) Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que B(-1 , 1 , 0) est le point de contact.

2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P)

b) Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) au point C (1 , 1 , 0)

c) calculer l'aire du triangle OCB

Exercice 3 : (3 $points$) — Examen national 2012 Session normale

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ les points : $A(1,1,-1)$ et $B(0,1,-2)$ et $C(3,2,1)$ et la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

1. Montrer que le point $\Omega(1,0,1)$ est le centre de la sphère (S) et que $\sqrt{3}$ est son rayon .
2. a)Montrer que que $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

b) vérifier que $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$, puis montrer que le plan (ABC) coupe l (S) selon un cercle (Γ) de rayon 1

3) soit (Δ) la droite passante par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

a. Montrer que : $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une présentation paramétrique de la droite (Δ) .

b. Démontrer que les coordonnées de H le point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (ABC) est (2,0,0)

c. Déduire le centre du cercle (Γ).

Exercice 4 : (3 $points$)

Examen national 2022 Session normale

Dans l'espace rapporté à R.O.N.D $(O, \vec{i}\, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points$A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

1. a. Montrer que que les points A,B et C détermine un plan

2. En déduire que $x + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

3. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$

Déterminer une équation de la sphère (S)

3. Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

   b. Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les cordonnées.

   c. calculer la distance $d(A, (\Delta))$

Exercice 5 : (3 $points$)

Examen national 2022 Session rattrapage

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de centre $\Omega(3,0,-1)$ de rayon $R = 3$ et (Δ) la droite passante par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$.

1) a) Calculer la distance $\Omega \boldsymbol{A}$

b) Montrer que les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires

c) Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère

2) a) Soit le point $M_a(2a-3, 3-2a, a-1)$ ou $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ et déduire que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

3) a) Vérifier que $2x - 2y + z - 9a + 13 = 0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ).

   b) Montrer que $d(\Omega, (P_a)) = |3a - 6|$.

   c) Déterminer les deux valeurs de $\boldsymbol{a}$ pour laquelle le plan (P_a) est tangente à la sphère (S) .

Exercice 6 : (3 $points$)

Examen national 2019 Session normale

Dans l'espace rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormé direct, on considère les points $A(1,2,2)$, $B(3,-1,6)$ et $C(1,1,3)$

b) Montrer que $x - 2y - 2z + 7 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2. Soient les points $E(5,1,4)$ et $F(-1,1,12)$ et (S) l'ensemble des points M vérifiant $\overline{ME}.\overline{MF} = 0$. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,1,8)$ et de rayon $R = 5$

3. a) Calculer $d(\Omega, (ABC))$ distance du point Ω au plan (ABC)

c) En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle Γ de rayon $r = 4$

Exercice 7 : (3 $points$) Examen national 2018 Session rattrapage

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}\,\vec{\jmath}\,\vec{k})$ on considère la sphère (S) de centre $\Omega(2, 1, 2)$ et de rayon 3 et le plan (P) passant par le point $A(-1,0,3)$ et $\vec{u}(4,0,-3)$ est un vecteur normal à (P)

1) Montrer qu'une équation de la sphère (S) est $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z = 0$

2) Vérifier que : $4x - 3z + 13 =$ est une équation cartésienne du plan (P)

3) a) Vérifier que $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

passant par le point Ω et orthogonale au plan (P)

b) Déterminer les coordonnées de H point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P)

4) a) Calculer $d(\Omega\,, (P)$ en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera.

Exercice 8 : (3 $points$) Examen national 2023 Session normal

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 1, 4)$, $B(2, 1, 2)$ et $C(2, 5, 0)$ et $\Omega(3, 4, 4)$

1) a) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés

b) Montrer que $\vec{n} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

2) Soit D le milieu du segment $[AC]$

a) Montrer que $\overrightarrow{D\Omega} = \vec{n}$

b) En déduire que $d(\Omega, (ABC)) = 3$

3) Soit (S) la sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$

a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S)

b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera

4) On considère (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$

Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2)

Exercice 8 : (3 $points$) Examen national 2023 Session rattrapage

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}\,\vec{\jmath}\,\vec{k})$, on considère les points $A(2, 1, 2)$, $B(-2, 0, 5)$ et $C(4, -5, 7)$ et $\Omega(1, -1, 0)$. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$

1) a) Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés

b) Montrer que $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

c) Vérifier que $x + 2y + 2z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

d) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en A

2) Soit (P) le plan d'équation cartésienne $3x + 4y + z + 1 = 0$ et (Δ) la droite passant par le point A et orthogonal au plan (P)

a) Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$

b) Déterminer les coordonnées du point D tel que H soit le milieu du segment $[AD]$

3) Soit (Q) le plan passant par le point D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

a) Montrer que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D

b) Montrer que les plans (ABC) et (Q) se coupent suivant la droite (BC)