FONCTIONS LOGARITHMES

I. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x) + x$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité 2cm.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
   - **a.** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{x}$.
   - **b.** Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ présente une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction.
2. **a.** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{x - 1 + 2\ln(x)}{x}$.
   - **b.** Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$, et qu'elle est strictement décroissante sur $]0;1[$.
   - **c.** Dresser le tableau de variations de f.
3. On note (Δ) la droite d'équation $y = x$:
   - **a.** Résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation suivante : $\ln(x)\big(\ln(x) - 1\big) = 0$.
   - **b.** Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est située au-dessous de (Δ) sur l'intervalle $]1;e[$, qu'elle est située au-dessus de (Δ) sur chacun des intervalles $]0;1[$ et $]e;+\infty[$.
4. **a.** Calculer $f''(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.
   - **b.** Montrer que le point d'abscisses $x = e^{\frac{3}{2}}$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
5. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

II. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \sqrt{e} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad , n > 0 \end{cases}$

1. Montrer, par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}$: $1 \le u_n \le \sqrt{e}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.

FONCTIONS LOGARITHMES

2 BAC PC et SVT

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;+\infty\right[$ par : $\begin{cases} f(x) = x - x^2\ln(x) & ,\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 2cm.

1. Montrer que f est continue à droite en 0.

2. Montrer que f est dérivable à droite en 0.

3. Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ présente une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction.

4. a. Montrer que pour tout x de $\left]0;+\infty\right[$: $f'(x) = 1 - x - 2x\ln(x)$.

   b. Déduire que f est strictement croissante sur $\left]0;1\right[$ et qu'elle est strictement décroissante sur $\left]1;+\infty\right[$.

5. Dresser le tableau de variations de f sur $\left[0;+\infty\right[$.

6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\left]\sqrt{e};2\right[$.

7. a. Donner une équation cartésienne de la demi-tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

   b. Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0;1\right[\right)\quad 0 < -x^2\ln(x)$, et que : $\left(\forall x \in \left]1;+\infty\right[\right)\quad -x^2\ln(x) < 0$.

   c. En déduire la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la demi droite (T) sur $\left[0;+\infty\right[$.

8. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\left]\sqrt{e};2\right[$.

9. Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la demi-droite (T) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

10. a. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3}{3} - x^3\ln(x)$ est une primitive sur $\left]0;+\infty\right[$ de la fonction $x \longmapsto -3x^2\ln(x)$.

    b. Déterminer la primitive de f sur $\left]0;+\infty\right[$ qui s'annule en 1.

11. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) & ,\ n > 0 \end{cases}$

    a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 1$.

    b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

    c. En déduire que (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.