EXERCICES : FONCTION LOGARITHME

DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Exercice 1 :

Résoudre :

a. $\ln x=3$; **b.** $\ln(2x)=0$;

c. $2\ln x-1=6$; **d.** $\ln(2x-1)=3$;

e. $\ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=1$; **f.** $\ln(x^2)=4$.

Exercice 2 :

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$a=\ln 3+\ln\dfrac{1}{3}$; $b=\ln\dfrac{1}{16}$; c = $\dfrac{1}{2}\ln\sqrt{2}$.

$d=\ln 50$; $e=\ln\dfrac{16}{25}$; $f=\ln 250$.

Exercice 3 :

Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble des réels x pour lesquels l'égalité est vraie.

a. $\ln(x^2-x)=\ln x+\ln(x-1)$;

b. $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)=\ln(x-1)-\ln(x+2)$.

ÉQUATIONS - INÉQUATIONS

Exercice 4 :

Après avoir déterminé l'ensemble de définition des solutions de l'équation, la résoudre :

a. $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$.

b. $2\ln x=\ln(2x^2+8x)$.

Exercice 5 :

Après avoir déterminé l'ensemble de définition des solutions de l'équation, la résoudre :

a. $\ln(x+1)=\ln 3$; **b.** $\ln(x+3)=\ln(2-x)$;

c. $\ln(x^2-4)=\ln(1-4x)$; **d.** $\ln(x^2-2x+2)=0$.

Exercice 6 :

Après avoir déterminé l'ensemble de définition des solutions de l'équation, la résoudre :

a. $\ln(1-x)+\ln(1+x)=2(\ln 2-\ln 5)$;

b. $\ln x+\ln(x-3)=\ln 4$;

c. $\ln(x(x-3))=\ln 4$.

Exercice 7 :

Après avoir déterminé l'ensemble de définition des solutions de l'inéquation, la résoudre :

a. $\ln x\leqslant\ln 3$; **b.** $\ln 2x\leqslant\dfrac{1}{2}\ln 4$;

c. $\ln x\geqslant 2\ln 5$; **d.** $\ln x\leqslant 2\ln 4-3\ln 2$.

e. $\ln\left(\dfrac{x-1}{2x-3}\right)\geqslant 0$.

Exercice 8 :

Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$.

a. $\ln(x+1)+\ln(x-2)<2\ln(3-x)$;

b. $\ln(x^2-x-2)<2\ln(3-x)$.

Exercice 9 :

1. Résoudre l'équation : $2X^2-X-1=0$.

2. En déduire les solutions de l'équation :

$$2(\ln x)^2-\ln x-1=0 .$$

Exercice 10 :

En vous inspirant de l'exercice précédent, résoudre les équations suivantes :

a. $-(\ln x)^2-4\ln x+5=0$;

b. $2(\ln x)^2-3\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)-9=0$.

Exercice 11:

1. Résoudre l'inéquation : $X^2+2X-3\geqslant 0$.

2. En déduire les solutions de l'inéquation :

$$(\ln x)^2+2\ln x-3\geqslant 0 .$$

LIMITES

Exercice 12: Vrai - Faux

Justifier la réponse.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x^2}{x}=0$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^5\ln x=0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\ln x}=+\infty$. **4.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x}{\ln x}=+\infty$.

Exercice 13:

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par :

a. $f(x)=x-\ln x$; **b.** $f(x)=x-\ln(x^2)$;

c. $f(x)=\dfrac{\ln(2x)}{x^2+1}$; **d.** $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^2+1}$.

Exercice 14 :

Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par :

a. $f(x)=x\ln(3x)$; **b.** $f(x)=(x^2+1)\ln(x+1)$;

c. $f(x)=\ln(x^2-1)$; **d.** $f(x)=\dfrac{x-1}{x}\ln x$.

DÉRIVÉES - PRIMITIVES

Exercice 15 :

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions puis calculer sa dérivée.

1. $f(x)=x\ln x$. **2.** $f(x)=(\ln x)^2$.

3. $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$. **4.** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$.

Exercice 16 :

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions puis calculer sa dérivée.

1. $f(x)=x^2\ln(1+x)$. **2.** $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

3. $f(x)=\ln(3-x^2)-x+2$. **4.** $f(x)=\ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$.

5. $f(x)=\ln(\ln x)$.

6. $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$

Exercice 17 :

Déterminer les primitives sur I de chacune des fonctions.

a. $f(x)=-\dfrac{3}{x}$ $I=]0;+\infty[$;

b. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $I=]-\infty;0[$;

c. $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ $I=]1;+\infty[$.

Exercice 18 :

a. Déterminer la primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0 .

1. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$; $I=]-1;1[$; $x_0=0$ et $y_0=0$.

2. $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln x$; $I=]0;+\infty[$; $x_0=1$ et $y_0=0$.

3. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$; $I=]0;1[$; $x_0=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $y_0=1$.

ÉTUDES DE FONCTIONS

Exercice19 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Étude d'une fonction auxiliaire
Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=1+x-x\ln x .$$

a. Étudier la limite de g en chacune des bornes de son ensemble de définition.
b. Étudier les variations de g sur $]0;+\infty[$ et construire son tableau de variations.
c. Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

2. Étude et représentation graphique de la fonction f.
a. Étudier la limite de f en chacune des bornes de son ensemble de définition et interpréter graphiquement les résultats.
b. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et déterminer la dérivée f' de f sur $]0;+\infty[$.
c. Vérifier que f' a le même signe que g sur $]0;+\infty[$.
d. Construire le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.
e. Démontrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$.
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} .
f. Déterminer l'équation réduite de la tangente T de C_f au point d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses.
g. Tracer les éventuelles asymptotes à C_f , T puis C_f .

Exercice 20 :

Soit a et b, deux réels, et g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=ax+b+\dfrac{\ln x}{x}$.
Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point $A(1;0)$ et admette, en ce point, une tangente parallèle à la droite d'équation $y=2x$.

Exercice 21 :

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x-1+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan (unité graphique : 2 cm).
1. Étudier la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.
b. Démontrer que la droite Δ d'équation $y=2x-1$ est une asymptote à C_f en $+\infty$.
Étudier la position de C_f par rapport à Δ.
3. Étudier les variations de f. Dresser son tableau de variations.
4. Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$ et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
5.Tracer la droite Δ et la courbe C_f .

Exercice22

la fonction **f** définie sur $[1;+\infty[$, *par :*

$$f(x)=x\sqrt{\ln x}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.

1) *Montrer que f est continue sur $[1;+\infty[$.*
2) a) *Etudier la dérivabilité de **f** à droite en 1 ; et Interpréter géométriquement le résultat trouvé.*
b) *Dresser le tableau de variation de f.*
3) a) *Déterminer l'intersection de $(\Delta): y=x$ et (C_f) .*
b) *Tracer (C_f) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.*
4) a) *Montrer que **f** admet une fonction réciproque g définie sur $[0;+\infty[$ □.*
b) *Tracer la courbe (C_g) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.*
5) *On considère la suite (u_n) définie par :*

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=g(u_n) \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases} .$$

a) *Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $0\le u_n\le e$.*
b) *Montrer que la suite (u_n) est décroissante.*
c) *En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.*

Exercice 23 :

Soit f la fonction définie sur]0;+oo[par $f(x)=(x+1)\ln x-1$, et $\mathscr{C}$ sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1) a. Calculer la limite de f en 0. En déduire l'existence d'une asymptote à ' .
b. Montrer que 'rf' admet une branche parabolique dans le sens de l'axe des ordonnées au voisinage de +oo.
2) a. Calculer la dérivée f' de f, puis la dérivée seconde f de f, montrer que $f''(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$.
b. Etudier le signe de f'', calculer $f'(1)$ et en déduire que pour tout x de]0 ; +∞ [, $f'(x)\ge 2$.
c. Préciser le sens de variation de f.
3) Montrer que pour tout x de]1 ; +oo[, $f(x)+1\ge 2(x-1)$.
4) Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une unique solution a, sur [1;2]. Donner à l'aide de la calculatrice un encadrement de a, à 10^{-2} près.
5) Tracer $\mathscr{C}$.

Exercice 24 :

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$\begin{cases} f(0)=0,\ f(1)=0, \\ f(x)=(\ln x)\times\ln(1-x),\ x\in]0\ ;1[. \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique : 10 cm).

Partie A - Étude de la fonction f

1) a. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$. Que peut-on en déduire ?

b. Calculer la limite quand x tend vers 0 de l'expression $\dfrac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2) Montrer que pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right[$,

$f\left(\dfrac{1}{2}-x\right)=f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)$. Que peut-on en conclure pour $\mathscr{C}$?

3) Soit φ la fonction définie sur $]0\ ;\ 1[$ par :

$\varphi(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$.

a. Montrer que : $\varphi''(x)=\dfrac{2x-1}{x(1-x)}$; en déduire les variations de φ' sur $]0\ ;\ 1[$.

b. Montrer que φ' s'annule en deux valeurs a_1 et a_2 sur $]0;1[$ (on ne cherchera pas à calculer ces valeurs). Donner le signe de φ' sur $]0\ ;\ 1[$.

c. Déterminer la limite quand x tend vers 0 de $\varphi(x)$ et la limite quand x tend vers 1 de $\varphi(x)$. Calculer $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right)$

En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $]0\ ;\ 1[$.

4) a. Montrer que $f'(x)$ a même signe que $\varphi(x)$ sur $]0;1[$.

b. Donner le tableau de variations de f .

c. Montrer que, pour tout x de $]0\ ;\ 1[$, l'inégalité double suivante est vraie :