

EXERCICE N°1 :

Donner la valeur de vérité et la négation de chacune des propositions suivantes :

- 1- $(\forall x \in \mathbb{R}), (\exists n \in \mathbb{N}) / n > x$.
- 2- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Q} / x < a < y$.
- 3- $\exists ! k \in \mathbb{Z} / -\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$
- 4- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / y^2 - xy - 1 = 0$

EXERCICE N°2 :

Montrer que :

- 1- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$.
- 2- $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 1 \wedge x \neq y) \Rightarrow \left(\frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1} \right)$.
- 3- $\forall x \in \mathbb{R}^+, x + \frac{1}{x} \geq 2$

EXERCICE N°3 :

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}$. Montrer que:

- 1- $(|a| < 1 \wedge |b| < 1) \Rightarrow (|a+b| < |1+ab|)$.
- 2- $(a \neq 1 \text{ et } b \neq 1) \Rightarrow (a+b-ab \neq 1)$

EXERCICE N°4 :

Montrer que :

- 1- $\forall y \in [-1, 1[; \exists ! x \in \mathbb{R}^+ : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = y$.
- 2- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (\sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \sqrt{b+1} - \sqrt{b}) \Leftrightarrow (b < a)$
- 3- $\forall x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{1+x^2} > 0$
- 4- $(\forall n \in \mathbb{N}), \frac{1+n^{2017} + (n+1)^{2018}}{2} \in \mathbb{N}$
- 5- $(\forall n \in \mathbb{N}), \sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)} + 1 \in \mathbb{N}$.

EXERCICE N°5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- 1- $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 2$
- 2- $\sqrt{2x^2 + 1} > 2x - 4$
- 3- $|x| + |x+1| + |x-2| = 5$

EXERCICE N°6 :

1. Démontrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$.
3. Soient a et b deux nombres rationnels.
 - a. Montrer que $a + b\sqrt{2} = 0 \Rightarrow a = 0$ et $b = 0$.
 - b. En déduire que, $\forall (a, b, a', b') \in \mathbb{Q}^4$ on a : $(a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}) \Rightarrow (a = a' \wedge b = b')$.

EXERCICE N°7 :

Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2 : \begin{cases} (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3} \\ a_n^2 - 1 = 3b_n^2 \end{cases}$$

EXERCICE N°8 :

Montrer par récurrence que :

$$1- \forall n \in \mathbb{N} : 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$2- \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}$$

$$3- \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{2^{n-1}} \leq 4 \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

$$4- \forall n \in \mathbb{N}, 1 + \alpha^n \geq 1 + n\alpha. \quad \text{Soit } \alpha > 0$$

$$5- \forall n \in \mathbb{N}^* \neg \{1, 2\} (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2} \alpha^2$$

$$6- \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1, 2\}, \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \geq \frac{1}{8} \left(13 - \frac{1}{n} \right)$$

$$7- \forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$$

$$8) \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$$

$$9) \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 3^{2n} + 2^{6n-5} \text{ est un multiple de } 11$$

$$10) \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = \frac{(-1)^{n-1} \times n(n+1)}{2}$$

$$11) \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n k \times 2^{k-1} = (n-1) \times 2^n + 1$$

$$12) \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$