Exercice 1

Comparer les deux nombres a et b dans les cas suivants :

1) a = $2-\sqrt{3}$ et $b=(2-\sqrt{3})^2$
2) $a=5+\sqrt{2}$ et $b=\sqrt{25+10\sqrt{2}}$
3) $a=\sqrt{10}$ et $b=\sqrt{3}+\sqrt{7}$
4) $a=4+\sqrt{17}$ et $b=3\sqrt{2}+\sqrt{17}$
5) $a=4\sqrt{5}-\sqrt{79}$ et $b=9-4\sqrt{5}$

Exercice 2

Soient a > 0 et b < 0,

On pose : $A=\dfrac{9a-4b}{3a-2b}$

Montrer que : 2 < A < 3

Exercice 3

Soient x et y deux éléments de]0 , +∞]

On pose : $A=\dfrac{12x+10y}{3x+2y}$

Montrer que 4 < A < 5

Exercice 4

a et b deux nombres réels strictement positifs tel que a ≠ b

1) Montrer que $a^2+b^2>2ab$
2) Déduire que : $\dfrac{2}{a^2+b^2}<\dfrac{1}{ab}<\dfrac{a^2+b^2}{2a^2b^2}$
3) Déduire que : $3,75<\sqrt{15}<4$

Exercice 5

Soient a et b deux réels tel que : 1 < a < b

on pose :

$A=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Et $B=\sqrt{a-1}-\sqrt{b-1}$

1) Déterminer le signe de A et B.
2) a) Montrer que :

$$\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

b) Montrer que : $0<\dfrac{A}{B}<1$ puis comparer A et B

3) Application : comparer les nombres :

$2-\sqrt{6}$ et $\sqrt{5}-\sqrt{7}$

Exercice 6

Soit x un réel tel que : $\dfrac{-9}{10\sqrt{2}-1}<x<\dfrac{-8}{10\sqrt{2}-2}$

On pose : $A=\dfrac{x\sqrt{2}+1}{x+1}$

Montrer que : $\dfrac{1}{10}<A<\dfrac{2}{10}$

Exercice 7

Soient a et b et c trois réels positifs

Montrer que :

$$\frac{a+b+c}{3}=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

Exercice 8

1) Soient x et y deux réels, vérifier que :

$x^2+y^2\geq\dfrac{1}{2}(x+y)^2$

2) a et b deux réels tel que : a + b = 2

Montrer que : $a^4+b^4\geq 2$

Exercice 9

Soient x et y deux réels tel que :

$-2\leq y\leq -1$ et $-3\leq x\leq 5$

Encadrer les nombres suivants :

x + y et x – y et xy

Exercice 10

Soient a et b deux réels tel que :

$1\leq b\leq 3$ et $3\leq a\leq 7$

1) Encadrer les nombres :

a^2 et b^2 puis en déduire un encadrement pour : a^2-b^2

2) Donner un encadrement pour les nombres : a + b et a – b , puis en déduire un encadrement pour :

a^2-b^2

3) Comparer les deux encadrements

Exercice 11

Soit ABC un triangle rectangle en A

On pose : AB = c et AC = b et BC = a

Tel que : $3 \le a \le 3{,}1$ et $1{,}5 \le b \le 1{,}6$

1) Donner un encadrement pour c
2) Soit H la projection vertical de A sur la droite (BC)
   Donner un encadrement de la distance AH
   (on prend $2{,}6 \le c \le 2{,}7$)

Exercice 12

Soient x et y deux éléments de [1 ,3] montrer que : $0 \le 2xy - x + 2y - 3 \le 18$

Exercice 13

Soient x et y deux nombres réels tel que :

$|x| < 1$ et $|y| < 1$

Montrer que : $\dfrac{1}{7} < \dfrac{1}{xy + x + y + 4} < \dfrac{1}{3}$

Exercice 14

Soit x un élément de [1 , 2]

Montrer que : $-3 \le 2x^2 - 3x - 2 \le 0$

Exercice 15

Soit x un élément de [2 , 5], on pose :

$$A = \frac{1-2x}{x-1}$$

Déterminer un encadrement de A d'amplitude $\dfrac{3}{4}$.

Exercice 16

1- Soient a et b et c des éléments de]0 , 1]

a) Montrer que : $(ab-1)(bc-1)(ca-1) \le 0$

b) Montrer que : $a + b + c + \dfrac{1}{abc} \ge \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + abc$

2- Soient x et y et z et t des réels tel que :

$0 < x \le y \le z \le t$

a) Montrer que : $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{t} + \dfrac{t}{x} \ge \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{t}{z} + \dfrac{x}{t}$

b) Montrer que :

$$(z-x)(t-x)(yt-xz) \ge 0$$

Exercice 17

1) Soit a un nombre réel

On pose : $A = a^4 + a^2 + a + 1$

a) Calculer A lorsque $a = \sqrt{2}$
b) Vérifier que :

$$a^2 + a + 1 = (a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

puis en déduire que : $A > a^4$

2) On suppose que $a > 1$
   Montrer que : $A < (a^2+1)^2$
3) En déduire un encadrement de : $\dfrac{\sqrt{7+\sqrt{2}}}{10^5}$ d'amplitude : 10^{-5}

Exercice 18

1) Soient a et b deux réels tel que : ab>0

Montrer que : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \ge 2$

2) Soient x , y et z des éléments de $\mathbb{R}_+^*$

a) Montrer que : $(x+y)(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}) \ge 4$

b) Montrer que :

$$(x + \frac{1}{y})^2 + (y + \frac{1}{x})^2 \ge 8$$

c) Montrer que : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \ge \dfrac{9}{x+y+z}$

Exercice 19

1) Soient a et b deux réels, vérifier que : $a^2 + b^2 \ge 2ab$
2) Soient a, b et c des réels, montrer que :

$$(a^2+b^2)c + (b^2+c^2)a + (c^2+a^2)b \ge 6abc$$

3) Soient a, b et c des éléments de ${}^{+}$

Montrer que :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$$

4) Soient a et b des éléments de]1 , $+\infty$[, montrer que :

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \ge 8$$

Exercice 20

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2, montrer que :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1$$

Exercice 21

a et b deux réels, tel que :

$a\in[-2,5]$ et $b\in[-3,-1]$, simplifier :

$A=2|2a+7|-|3b|+2|b+8|-|2b-a|$

Exercice 21

Soient a et b deux réels tel que : $a > b > 0$ et $1 < ab < 2$ et $7 < a^2 + b^2 < 12$

1) Montrer que : $3 < a + b < 4$ et que :

$$\sqrt{3}<a-b<\sqrt{10}$$

2) Déduire que : $\frac{3+\sqrt{3}}{2}<a<2+\frac{\sqrt{10}}{2}$

et que : $\frac{3-\sqrt{10}}{2}<b<\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

Exercice 22

Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant :

a) $\left|x-\frac{1}{2}\right|\le\frac{1}{4}$ b) $|x-2|\ge\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2}\le|x-1|<1$

Exercice 23

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tel que :

$-3\le x\le 2$ et $1\le y\le 5$

Montrer que :

$\left|\frac{x}{y}\right|\le 3$ et $|xy|\le 15$ et $|x-y|\le 8$

Exercice 24

Soit a un réel tel que : $|4a+5|\le 1$

1) Montrer que : $-\frac{3}{2}\le a\le -1$ puis encadrer : $(2a+1)^2$.

2) Développer : $(2a+1)^2(1-a)$ puis montrer que : $2\le -4a^3+3a+1\le 10$.

Exercice 25

Soient a et b deux réels tel que :

$|a+3|\le 1$ et $1\le b\le 3$

1) Encadrer le nombre a, puis montrer que : $|a+b+1|\le 2$

2) On considère le nombre réel A tel que :

$A=2b-3a+ab$

Vérifier que : $A=(a+2)(b-3)+6$

Puis montrer que : $6\le A\le 10$

Exercice 26

Soient x et y des éléments de l'intervalle $[0,\frac{1}{3}]$, on pose : $A=x+y-6xy$

1) Montrer que : $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}-3x\le\frac{1}{2}$

et que : $-\frac{1}{3}\le 2y-\frac{1}{3}\le\frac{1}{3}$

2) Vérifier que :

$$\left|A-\frac{1}{6}\right|=\left|\frac{1}{2}-3x\right|\left|2y-\frac{1}{3}\right|$$

Puis en déduire que : $A\in[0,\frac{1}{3}]$

Exercice 27

Soient a et b deux réels tel que : $-1<a<0$ et $0<a^2+a+b^2<3$.

1) Montrer que : $|b|<2$

2) On suppose que : $0<b<1$

   a. vérifier que :

$ab+b+a^2-1=(a+1)(a+b-1)$

b. En déduire que : $|ab+b+a^2|<1$

Exercice 28

a et b deux réels tel que :

$|2a-b|<3$ et $2<b<5$

1) Montrer que : $-\frac{1}{2}<a<4$

2) Encadrer les nombres :

$x=2b-a$ $y=a^2+b^2$ $z=ab$

3) a) Développer le produit : $(2a-b)(2b-a)$

b) Montrer que :

$$|5ab-2(a^2+b^2)|<63$$

Exercice 29

Soient a et b et c des réels tel que :

$\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$ et $-2 < b < -1$ et $-\frac{1}{2} < c < \frac{1}{3}$

1) Encadrer les nombres :

   ab et ac et $a-b$ et $\frac{a^2+b^2}{1+a^2+c^2}$

2) Montrer que : $\left|\frac{2c+3}{6a+b} - \frac{13}{6}\right| < \frac{3}{2}$

Exercice 30

Soit x un élément de l'ensemble $]0, \frac{1}{4}[$

1. Montrer que : $0 < \frac{x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} < \frac{1}{4}$
2. Vérifier que :

   $$\frac{1+x\sqrt{x}}{1-x} - x = \frac{x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + 1$$

3. En déduire que :

   $$1+x < \frac{1+x\sqrt{x}}{1-x} < \frac{5}{4} + x$$

4. Déterminer une valeur approchée par défaut au nombre $\frac{1+\sqrt{(0,2)^3}}{0,8}$ de précision 0,25.

Exercice 31

a et b deux réels de l'intervalle :]-1 , 1[

Montrer que : $\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1$

Exercice 32

Soit x un élément de l'intervalle : $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

1. Vérifier que : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$
2. Montrer que : $\frac{2}{3} \le \frac{1}{1-x} \le 2$ puis déduire que : $\left|\frac{1}{1-x} - (1+x)\right| \le 2x^2$
3. Déterminer une approximation du nombre $\frac{1}{99}$ de précision 2.10^{-6}

Exercice 33

a est une valeur approché par excès au nombre $\frac{2}{3}$ de précision 2.10^{-1}

1. Montrer que : $\frac{2}{3} \le a \le \frac{13}{15}$
2. Encadrer le nombre $\frac{a}{a-1}$ puis déduire que $\left|\frac{a}{a-1}\right| \le \frac{13}{2}$
3. Soit b un réel tel que : $\left|\frac{3b+1}{3a}\right| < \frac{1}{13}$

   a) Montrer que : $-\frac{2}{5} < b < -\frac{4}{15}$

   b) Encadrer le nombre $\frac{a}{b}$

Exercice 34

Soit x un élément de l'intervalle :]-1,0[

1. a) vérifier que

   $$1 - x - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{3}{2}$$

   b) En déduire un encadrement du nombre $1 - x - \frac{x^2}{2}$ d'amplitude 0,5.
2. a) Montrer que :

   $$1 - x - \frac{x^2}{2} < \sqrt{1-2x} < 1 - x$$

   b) En déduire que :

   $$-\frac{x^2}{2} < \sqrt{1-2x} - (1-x) < 0$$

3. Trouver une valeur approchée par excès au nombre $\sqrt{1,04}$ de précision 2×10^{-4} sans utilisation de la calculatrice.