Exercice(1)

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

Partie(A)

1) (a) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f

(b) Montrer que la fonction f est impair

(c) Montrer que : $(\forall x\in D)\quad |f(x)|\le \dfrac{1}{2}$

2) (a) Montrer que pour tout nombres réels différents x et y on a :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

(b)En déduire le sens de variation de f sur chacun des intervalles $[0;1]$ et $[1;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f sur D

3) Montrer que pour tout nombres réels positifs a et b on a :

$$a+b\ge\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad \frac{(a+b)^2+1}{a+b}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Partie (B)

Soient g et h deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x)=\sqrt{x}$ et $h(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

1) Tracer la représentation graphique de g dans le repère orthonormé $R=(O;\vec{i};\vec{j})$

2) (a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad 0\le h(x)\le\dfrac{1}{2}$

(b) résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation : $4h(x)=\sqrt{2(x+1)}$

3) (a) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\quad h(x)=f\circ g(x)$

(b) ***Dresser le tableau de variation de h*** .

Exercice(2)

On considère les fonctions f et g telles que : $f(x)=\sqrt{x+2}$ et $g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

1) Etudier le sens de variation des fonctions f et g, puis tracer leur représentations graphiques sur le même repère orthonormé $R=(O;\vec{i};\vec{j})$

2) En déduire que l'équation $x\sqrt{x+2}-1=2x$ admet deux solutions -1 et α telle que $\alpha\in]0;+\infty[$

3) Dresser le tableau de signe de $f(x)-g(x)$ sur $]0;+\infty[$ puis en déduire que $3\prec\alpha\prec 4$

4) Montrer que f admet une valeur maximal et une valeur minimal sur $[1;7]$

5) Montrer que f n'est pas bornée .

Exercice(3)

On considère les fonctions f et g et h telles que $f(x)=x^2-x$ et $g(x)=\dfrac{x-2}{x}$ et

$:h(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{1-x}\right)$

1) Dresser le tableau de variation de f et de g

2) Vérifier que $h(x)=(g\circ f)(x)$ pour tout x de $]0;1[$

3) En déduire le sens de variation de la fonction h sur $]0;1[$