

EXERCICE 1 .

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - x \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 4} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - 3}{x - 3} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

EXERCICE 2 .

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \quad , \quad x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 1$.

EXERCICE 3 .

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^3 - x - 14}{x^2 - x - 2} \quad , \quad x > 2 \\ f(x) = \frac{x - 2}{2x^2 + x - 10} \quad , \quad x < 2 \\ f(2) = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 2$.

EXERCICE 4 .

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 0$.

EXERCICE 5 .

Soit f la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{21(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3})}{2x^2 - 3x + 1} \quad , \quad x \neq 1 \text{ et } x \neq \frac{1}{2} \\ f(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en $x_0 = 1$.

EXERCICE 6 .

Soit f une fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x^2 + bx + 1 \quad , \quad x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \quad , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \text{avec } b \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la valeur de b pour que la fonction f soit continue en 1.

EXERCICE 7 . Étudier la continuité de la fonction f sur D_f dans chaque cas.

1. $f(x) = x + \sqrt{x+1}$

3. $f(x) = 2\sqrt{x} - x$

2. $f(x) = 4x + 1 + \frac{1}{x-1}$

4. $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

EXERCICE 8 .

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 4x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

2. Dresser le tableau de variation de f .

3. Déterminer l'image des intervalles suivants par la fonction f . $\left] -\infty, \frac{1}{2} \right], \left] 1, \frac{3}{2} \right]$

EXERCICE 9 .

Montrer que l'équation $x^3 + x + 1 = 0$, admet une unique racine dans l'intervalle $] -1, 0[$.

EXERCICE 10 .

1. Montrer que l'équation : $(E) : -2x\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 5x = -10$ admet une seule solution α sur $]0, +\infty[$.

2. Vérifier que : $1,4 < \alpha < 1,5$.

3. Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'inéquation $(I) : 2x\sqrt{x} - \frac{1}{x} + 5x - 10 < 0$.

EXERCICE 11 .

1. Montrer que l'équation : $x^5 + 4x^3 + 5x - 7 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que : $0 < \alpha < 1$
2. Vérifier que : $0,840 < \alpha < 0,841$.

EXERCICE 12 . Soit f une fonction définie sur $] -\infty, 0]$ par : $f(x) = -3x^2 + 3x + 1$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

2. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

EXERCICE 13 . Soit f une fonction définie sur $[2, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x-2} + x + 1$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

2. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

EXERCICE 14 .

1. Déterminer les nombres a et b tel que : $(\forall x \in \mathbb{R}), x^3 - 3x - 18 = (x-3)(x^2 + ax + b)$.

2. Soit t le réel défini par : $t = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$

a) Montrer que t est une solution de l'équation : $x^3 - 3x - 18 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

b) En déduire que : $t = 3$.