

Ex 1 :

1°) Donner la négation des propositions suivantes :

$$(P): (\exists x \in \mathbb{R}) \quad x < \sqrt{x+1} \quad (Q): (\forall n \in \mathbb{N}) \frac{n+4}{n+3} \in \mathbb{N}$$

$$(R): (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x^2 + x + 3 > 0 \text{ et } -1 \leq x \leq 1$$

$$(S): (\forall x \in \mathbb{R}^*) (\exists y \in \mathbb{R}) \quad x^2 + xy + y^2 = 0$$

2°) Déterminer la valeur de vérité de (P) et (Q) et (S)

Ex 2 : En utilisant la contraposée Montrer que :

$$1) (\forall n \in \mathbb{R}) \quad x \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}$$

$$2) (\forall x, y \in \mathbb{R}^{*2}) \quad y \neq -\frac{3}{4}x \Leftrightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$$

$$3) (\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad x \neq y \text{ et } xy \neq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}$$

$$4) (\forall x, y \in \mathbb{R}^+) \quad x \neq 1 \text{ ou } y \neq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \neq \frac{x+y}{2}$$

$$5) (\forall x, y, z \in \mathbb{R}) \quad x + y > 2z \Leftrightarrow (x > z \text{ ou } y > z)$$

$$6) (\forall a, b \in \mathbb{R}) \quad a \neq 2 \text{ et } b \neq 3 \Leftrightarrow ab - 3a \neq 2b - 6$$

Ex 3 :

$$1) \text{ Soit } x, y \in \mathbb{R} \text{ montrer que } x + y = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1$$

$$2) (\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*) \quad x < y \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{2x+5y}{5x+2y} < \frac{x}{y}$$

$$3) (\forall x, y \in \mathbb{R}^2) \quad \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Ex 4 : En utilisant un raisonnement par l'absurde

$$1) (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n^2 + 7n + 12} \in \mathbb{N}$$

$$2) (\forall x \in \mathbb{N}^*) \quad x^2 + 1 \text{ n'est pas un carré parfait}$$

$$3) \text{ Montrer que } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$4) (\forall x \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{\frac{x}{x+1}} \in \mathbb{Q}$$

Ex 5 : Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$1) \sqrt{x^2 - 5x + 6} > x + 4$$

$$3) \sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 2x - 3$$

$$2) \sqrt{2x^2 + 1} > 2x - 4$$

$$4) \sqrt{x-1} \geq x - 4$$

Ex 6 : En utilisant un raisonnement par récurrence $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$1\text{-} \text{ Soit } x \geq 0 \text{ montrer que } (\forall x \in \mathbb{N}) \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

$$2\text{-} (\forall x \in \mathbb{N}) \quad 3^{2n} + 2^{6x-5} \text{ est divisible par 11}$$

$$3\text{-} (\forall x \in \mathbb{N}^*) \quad 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{x(n+1)(n+2)}{3}$$

$$4\text{-} (\forall x \in \mathbb{N}) \quad 21^n - 2^{2n} \text{ est divisible par 17}$$