

# LES FONCTIONS EXPONENTIELLES AU BAC PC

## EXERCICE 1

### Partie A

On considère la fonction  $g$  dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = (x-1)e^x + 2$ .

1. Étudie les variations de la fonction  $g$
2. a) Démontre que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $-1 < \alpha < 0$ .
  - b) Donne un encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.
  - c) Détermine le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Partie B

On considère la fonction  $f$  dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x + 1 - xe^x$ .

(C) est la courbe de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité : 2 cm.

1. a) Calcule  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- c) Étudie les variations de  $f$  et dresse son tableau de variation.
2. a) Démontre que la droite (D) d'équation  $y = 2x - 1$  est asymptote à (C) en  $+\infty$ .
- b) Étudie les positions relatives de (D) et de (C).
3. Construis (C) et (D) dans le repère orthonormé d'unité : 2 cm.

## EXERCICE 2

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$  et (C) sa courbe représentative

dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1- a. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- b. Interpréter géométriquement les deux résultats trouvés.

- 2 a. Montrer que :  $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

- b. Dresser le tableau de variations de  $f$ .

- 3- a. Montrer que le point  $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$  est un centre de symétrie de la courbe (C)

- b. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point  $I$ .

- c. Tracer dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , la tangente (T) et la courbe (C).

- 4 a. Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $]0; 1[$ .

- b. Montrer que :  $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$  pour tout  $x$  de  $]0; 1[$



### **EXERCICE 3**

#### **Partie I**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $IR$  par :  $g(x) = xe^x - 2$

1) Dresser le tableau des variations de  $g$

2) a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet, dans  $IR$  une unique solution  $\alpha$  et que  $0,8 < \alpha < 0,9$ .

b) Donner, suivant les valeurs de  $x$ , le signe de  $g(x)$ .

#### **Partie II**

On Considère la fonction  $f$  définie sur  $IR$  par :  $f(x) = \frac{e^x - 2x}{e^x + 2}$  et on désigne par  $(C_f)$  sa courbe

représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .

b) Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = -x$  est une asymptote à la courbe  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$ .

c) Etudier la position relative de  $(C_f)$  et la droite  $\Delta$ .

2) a) Montrer que pour tout réel  $x$  on a:  $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x + 1)^2}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$

c) Montrer que :  $f(\alpha) = 1 - \alpha$ .

3) Tracer la courbe  $(C_f)$  et l'asymptote  $\Delta$ .

### **EXERCICE 4**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]-\infty; 0]$  par :  $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$

et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1- Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ , et interpréter géométriquement le résultat.

2- Montrer que:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ , et en déduire la nature de la branche infinie de  $(C)$  au voisinage de  $-\infty$ .

3- Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de l'intervalle  $]-\infty; 0]$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .

4- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $[0; 1[$ , et que :

$f^{-1}(x) = \ln(1 - x^2)$  pour tout  $x$  de  $[0; 1[$ .

5- Tracer dans le même repère  $(O; i, j)$ , la courbe  $(C)$  et la courbe  $(C')$  de la fonction  $f^{-1}$ .

### **EXERCICE 5**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par:  $f(x) = \frac{2e^{2x} - 2}{2e^{2x} - 5e^x + 2}$

et  $C$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1- Déterminer  $D$  l'ensemble de définition de  $f$ , et étudier la parité de  $f$ .

2- Étudier les variations de  $f$ .

3- a. Donner une équation de la tangente à  $(C)$  au point d'abscisse 0.

b. Déterminer les branches infinies de  $(C)$ .

c. Tracer la courbe  $(C)$ .





## **EXERCICE 6**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \ln(1 + 2e^x)$  et  $(C)$  sa courbe représentative

dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1- a. Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

b. Vérifier que :  $f(x) = x + \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2e^x}\right)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ;

c. Étudier les branches infinies de la courbe  $(C)$

2 a. Donner le tableau de variations de la fonction  $f$ ;

b. Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 0.

c. Tracer dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la tangente  $(T)$  et la courbe  $(C)$

3- Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

a. Montrer que  $u_{n+1} - u_n > \ln(2)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

b. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est strictement croissante.

c. Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

4- Soit  $(v_n)$  la suite numérique définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = 1 + e^{u_n}$ .

a. Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2.

b. Déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

c. Calculer  $\lim u_n$

## **EXERCICE 7**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans un

repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1- a. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes des intervalles de  $\mathbb{R}^*$

b. Étudier les branches infinies de la courbe  $(C)$ .

2- a. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$ .

b. Dresser le tableau de variations de  $f$ .

c. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 1.

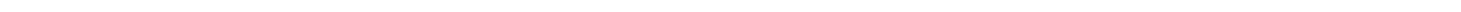
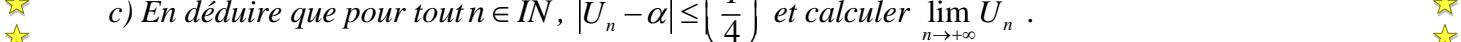
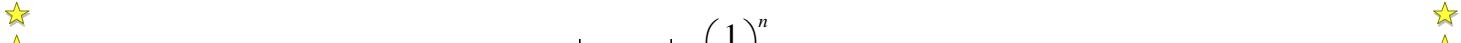
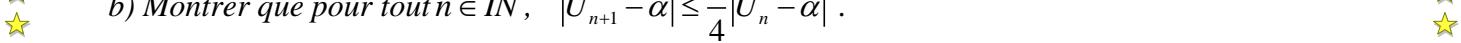
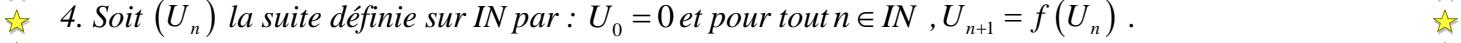
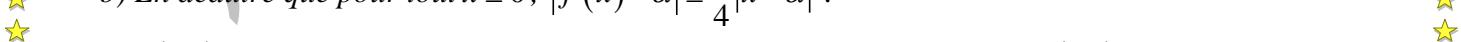
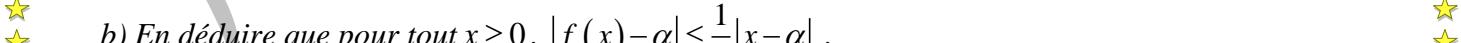
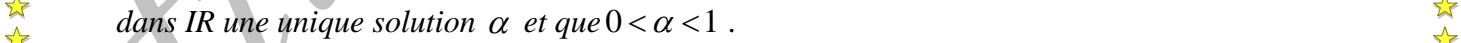
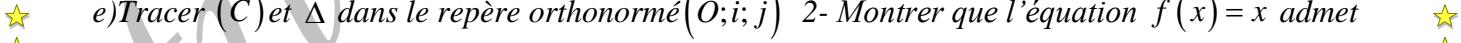
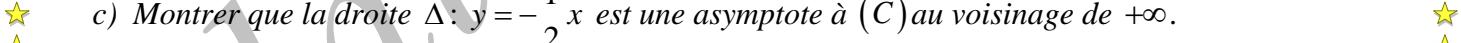
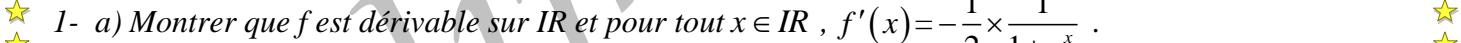
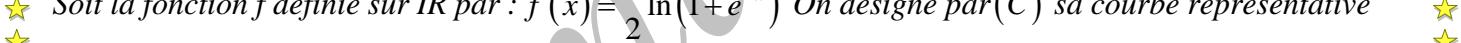
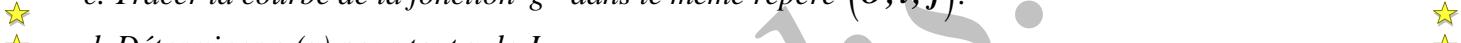
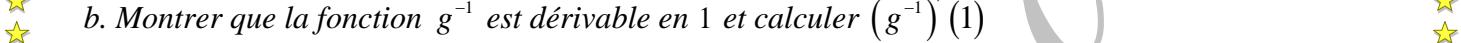
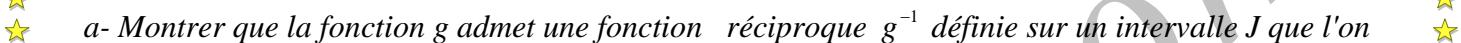
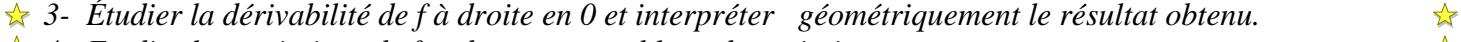
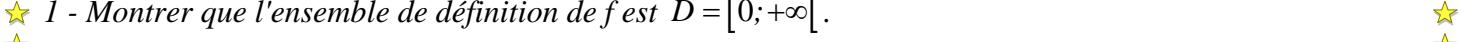
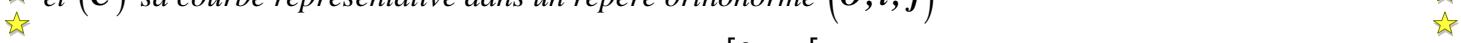
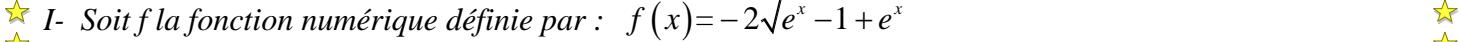
3 - a. Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$ , on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+2)}{x^3} e^x$$

b. Etudier la concavité de  $(C)$ .

c. Tracer la courbe  $(C)$ .





## **EXERCICE 10**

### **Partie I**

1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $g(x) = e^x - x - 1$ .

Etudier les variations de la fonction  $g$  puis en déduire que :  $(\forall x \in [0; +\infty[) ; g(x) \geq 0$ .

2) On considère la fonction  $h$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $h(x) = (2-x)e^x - 1$ .

a) Etudier les variations de la fonction  $h$ .

b) Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que :

$$1 < \alpha < 2$$

c) En déduire que  $(\forall x \in [0; \alpha]) : h(x) \geq 0$  et que  $(\forall x \in [\alpha; +\infty[) : h(x) \leq 0$ .

### **Partie II**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

Et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a) Montrer que  $(\forall x \in [0; +\infty[) ; e^x - x > 0$ . (on pourra utiliser la question 1 de **partie I**)

b) Vérifier que  $(\forall x \in [0; +\infty[) ; f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$

c) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) Montrer que :  $(\forall x \in [0; +\infty[) ; f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$ ; En déduire le tableau de variation de  $f$ .

3) a) Montrer que  $(\forall x \in [0; +\infty[) ; f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$

b) En déduire la position relative de la courbe  $(C)$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$ .

c) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 1.

d) Construire la courbe  $(C)$  et les droites  $(\Delta)$  et  $(D)$  où  $(D)$  est la droite d'équation  $y = 1$ . On donne  $\alpha \approx 1,8$  et  $f(\alpha) \approx 1,2$ .

4) a) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$

b) En déduire la primitive de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  qui s'annule en 0.

### **Partie III**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ ; pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq 1$ .

2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante. (on pourra utiliser la question 3)b) de **la partie II**)

3) Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.