LES FONCTIONS EXPONENTIELLES AU BAC PC

EXERCICE1

Partie A

On considère la fonction g dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(x-1)e^{x}+2$.

1. Étudie les variations de la fonction g

2. a) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et que $-1<\alpha<0$.

   b) Donne un encadrement de α à 10^{-1} près.

   c) Détermine le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x+1-xe^{x}$.

(C) est la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité : 2 cm.

1. a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

   c) Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

2. a) Démontre que la droite (D) d'équation $y=2x+1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

   b) Étudie les positions relatives de (D) et de (C).

3. Construis (C) et (D) dans le repère orthonormé d'unité : 2 cm.

EXERCICE 2

On considère la fonction numérique f définie sur IR par: $f(x)=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$ *et* (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Interpréter géométriquement les deux résultats trouvés.

2 a. Montrer que : $f'(x)=\dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}$ *pour tout x de IR.*

b. Dresser le tableau de variations de f.

3- a. Montrer que le point $I\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ *est un centre de symétrie de la courbe* (C)

b. Déterminer une équation de la tangente (T) *à la courbe* (C) *au point I.*

c. Tracer dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, *la tangente* (T) *et la courbe* (C).

4 a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} *définie sur l'intervalle* $]0;1[$.

b. Montrer que : $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ *pour tout x de* $]0;1[$

EXERCICE 3

Partie I

Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = xe^x - 2$

1) Dresser le tableau des variations de g

2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet, dans IR une unique solution α et que $0,8 < \alpha < 0,9$.

b) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.

Partie II

On Considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{e^x - 2x}{e^x + 2}$ et on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

c) Etudier la position relative de (C_f) et la droite Δ .

2) a) Montrer que pour tout réel x on a: $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que : $f(\alpha) = 1 - \alpha$.

3) Tracer la courbe (C_f) et l'asymptote Δ.

EXERCICE 4

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty;0]$ par : $f(x) = \sqrt{1 - e^x}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, et interpréter géométriquement le résultat.

2- Montrer que: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, et en déduire la nature de la branche infinie de (C) au voisinage de $-\infty$.

3- Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty;0]$ et dresser le tableau de variations de f.

4- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0;1[$, et que :

$f^{-1}(x) = \ln(1 - x^2)$ pour tout x de $[0;1[$.

5- Tracer dans le même repère (O;i,7), la courbe (C) et la courbe (C') de la fonction f^{-1}

EXERCICE 5

Soit f la fontion numérique de la variable réelle x définie par: $f(x) = \dfrac{2e^{2x} - 2}{2e^{2x} - 5e^x + 2}$

et C sa courbe représentative dans un repère Orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- Déterminer D l'ensemble de définition de f, et étudier la parité de f.

2- Étudier les variations de f.

3- a. Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

b. Déterminer les branches infinies de (C).

c. Tracer la courbe (C).

EXERCICE 6

Soit f la fonction numérique définie sur R par : $f(x)=\ln(1+2e^{x})$ *et* (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- a. *Montrer que :* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

b. *Vérifier que :* $f(x)=x+\ln(2)+\ln\left(1+\frac{1}{2e^{x}}\right)$ *pour tout x de R;*

c. *Étudier les branches infinies de la courbe* (C)

2 a. *Donner le tableau de variations de la fonction f;*

b. *Déterminer l'équation de la tangente* (T) *à la courbe* (C) *au point d'abscisse 0.*

c. *Tracer dans le repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$ *la tangente* (T) *et la courbe* (C)

3- *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *la suite numérique définie par:*

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \qquad (\forall n\in IN) \end{cases}$$

a. *Montrer que* $u_{n+1}-u_n>\ln(2)$ *pour tout n de IN.*

b. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est strictement croissante.*

c. *Montrer que:* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

4- *Soit* (v_n) *la suite numérique définie par :* $(\forall n\in IN) \qquad v_n=1+e^{u_n}$.

a. *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique de raison 2.*

b. *Déterminer* u_n *en fonction de n pour tout* $n\in IN$

c. *Calculer* $\lim \frac{u_n}{\ }$

EXERCICE 7

Soit f la fonction numérique définie sur IR^* *par :* $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{x}$ *et* (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- a. *Déterminer les limites de f aux bornes des intervalles de* IR^*

b. *Étudier les branches infinies de la courbe* (C).

2- a. *Calculer* $f'(x)$ *pour tout x de* IR^*.

b. *Dresser le tableau de variations de f.*

c. *Déterminer une équation de la tangente* (T) *à la courbe* (C) *au point d'abscisse* 1 .

3 - a. *Montrer que pour tout x de* IR^*, *on a :*

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+2)}{x^3}e^{x}$$

b. *Etudier la concavité de* (C).

c. *Tracer la courbe* (C).

EXERCICE 8

I- Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = -2\sqrt{e^x - 1} + e^x$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 - Montrer que l'ensemble de définition de f est $D = [0;+\infty[$.

2 - Calculer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3- Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

5 - Déterminer la branche infinie de la courbe (C).

6 - Tracer la courbe (C).

7 - Soit g la restriction de f à l'intervalle $[\ln 2;+\infty[$

a- Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera et calculer $g(\ln 5)$.

b. Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$

c. Tracer la courbe de la fonction g^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

d. Déterminer g (x) pour tout x de J

II - Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \ln 2$ et $u_{n+1} = g^{-1}(u_n)$ $(\forall n \in IN)$.

a. Montrer que: $(\forall n \in IN)$; $0 < u_n < 2$

b. Montrer que (u_n) est strictement croissante et en déduire qu'elle est convergente.

EXERCICE 9

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+e^{-x})$ On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- a) Montrer que f est dérivable sur IR et pour tout $x \in IR$, $f'(x) = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+e^x}$.

b) Etudier les variations de f.

c) Montrer que la droite $\Delta : y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

d) Etudier la position relative de (C) et Δ.

e)Tracer (C) et Δ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ 2- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans IR une unique solution α et que $0 < \alpha < 1$.

3- a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

4. Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_0 = 0$ et pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \geq 0$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in IN$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

EXERCICE 10

Partie I

1) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=e^x-x-1$.

Etudier les variations de la fonction g puis en déduire que : $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $g(x)\geq 0$.

2) On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par : $h(x)=(2-x)e^x-1$.

a) Etudier les variations de la fonction h.

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α et que : $1<\alpha<2$.

c) En déduire que $(\forall x\in[0;\alpha])$: $h(x)\geq 0$ et que $(\forall x\in[\alpha;+\infty[)$: $h(x)\leq 0$.

Partie II

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Montrer que $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $e^x-x>0$.(on pourra utiliser la question 1 de **partie I**)

b) Vérifier que $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$

c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2) Montrer que : $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(e^x-x)^2}$; En déduire le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que $(\forall x\in[0;+\infty[)$; $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$

b) En déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) d'équation $y=x$.

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

d) Construire la courbe (C) et les droites (Δ) et (D) où (D) est la droite d'équation $y=1$ .On donne $\alpha\simeq 1{,}8$ et $f(\alpha)\simeq 1{,}2$.

4) a) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$

b) En déduire la primitive de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ qui s'annule en 0.

Partie III

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$; pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\leq u_n\leq 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante. (on pourra utiliser la question 3)b) de **la partie II**)

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.