Exercice 1 : Considérons la suite (u_n) définie par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{17}{19}u_n + \frac{18}{19}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer que : $u_n \geq 9$, pour tout n de $\mathbb{N}$
2. Montrer que (u_n) est décroissante , puis déduire qu'elle est convergente.
3. On pose , $v_n = u_n - 9$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique
   b- Calculer v_n en fonction de n
   c- Déduire u_n en fonction de n, puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 2 :
Considérons la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{12-8u_n}{4-3u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que : $u_n > 2$, pour tout n de $\mathbb{N}$
2. On pose : $v_n = \frac{u_n}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a- Montrer que (v_n) est une suite arithmétique
   b- Calculer v_n en fonction de n
   c- Déduire u_n en fonction de n, puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3 : Considérons la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{7u_n+2}{2u_n+7}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1. Montrer par récurrence que : $u_n \geq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$
2. Montrer que (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente
3. On pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique
   b- Calculer v_n en fonction de n
   c- Déduire u_n en fonction de n, puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 4 : Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{5n^2+3}{2n-7}$ 2. $u_n = \frac{7n+(-1)^n}{5n+3}$ 3. $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2+3}$ 4. $u_n = \frac{3^n+5^n}{3^n+4\times5^n}$
5. $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+n^2}} + \dots\dots\dots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$
6. $u_n = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \dots\dots\dots - \frac{1}{3^n}$

Exercice 5 :
Considérons la fonction f définie sur $I = [0,1]$ par : $f(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$

1. Etudier les variations de f sur $I = [0,1]$
2. Montrer que $f(I) \subset I$
3. Etudier la position de (C_f) avec l'axe $(\Delta): y = x$ sur $I = [0,1]$
4. Considérons la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$
   a- Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$
   b- Etudier la monotonie de (u_n)
   c- Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$